# Cours avec T.D corrigé d'Analyse 4
# Filière SMA-S3


Pr. Mohammed MOUSSA

Département de Mathématique
Faculté des sciences
Université Ibn Tofail, Kénitra


Octobre 2017

# Table des matières


**1 Séries Numériques** **3**
1.1 Introduction . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3
1.2 Série convergente, série divergente . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3
1.3 Critères de convergence des séries numériques à terme positif . . . . . . . . . . 4
1.4 Séries à terme quelconque . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6

**2 Suite & Séries de Fonctions** **7**
2.1 Suite de fonctions . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 7
2.2 Continuité, intégrabilité et dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions . 8
2.3 Série de fonctions . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 10
2.4 Propriétés des séries de fonctions . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 11

**3 Séries Entières** **14**
3.1 Définition d'une série entière . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 14
3.2 Rayon de convergence . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 14
3.3 Propriété de la somme d'une série . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 16

**4 Séries de Fourier** **19**
4.1 Définition d'une série de Fourier . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 19
4.2 Séries de Fourier . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 20

**5 Travaux Dirigés** **23**

# Avant-Propos

Ce polycopié est destiné aux étudiants de la filière SMA (S3), résumant le cours du module d'analyse 4. Le polycopié contient essentiellement les définitions, les théorèmes avec des exemples mais les démonstrations seront présentées aux séances de cours. Donc, pour une bonne assimilation du cours la présence de l'étudiant est indispensable. Les T.D ainsi que leurs corrigés se trouvent à la fin du polycopié .

Le cours comprend quatre chapitres à savoir

1. ***Séries Numériques***
2. ***Suite & Séries de Fonctions***,
3. ***Séries Entières***,
4. ***Séries de Fourier***.

# Chapitre 1

# Séries Numériques

## 1.1 Introduction

L'objet de ce chapitre dans lequel on considère des suites suites numériques, $(u_n)$, est de chercher à quelles conditions on peut donner un sens à l'expression $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ . On associe pour cela à la suite $(u_n)$ la suite $(s_n)$ définie par $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ ; on cherche alors des conditions, en général suffisantes, sur la suite $(u_n)$ pour que la suite $(s_n)$ soit convergente. Lorsque la suite $(s_n)$ est convergente, on peut se demander si les propriétés de commutativité et d'associativité des sommes finies s'étendent à des sommes comportant un nombre infini de termes.

L'étude des séries joue un rôle fondamental en analyse : les séries réelles permettent de construire des nombres comme e qui ne sont ni rationnels ni même algébriques (un nombre algébrique est un nombre qui est racine d'une équation algébrique $P(x) = 0$ , où $P$ est un polynôme à coefficients entiers) et d'en calculer des valeurs approchées. Les séries de fonctions conduisent à définir de nouvelles fonctions. Les ***séries entières et les séries de Fourier***, en particulier, sont à la base d'une partie importante de l'analyse : l'analyse harmonique ou analyse de Fourier

## 1.2 Série convergente, série divergente

**Définition 1.1** *Soit $(u_n)$ une suite de nombres réels ou complexes, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k$ la somme des $n+1$ premiers termes de cette suite.*

*Si la suite $(s_n)$ est convergente, on dit que* ***la série de terme général*** *$u_n$* ***(ou la série $\sum u_n$ ) est convergente****. La limite, notée $s$, de la suite $(s_n)$ est la somme de la série $\sum u_n$ . On écrit alors : $s = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$.*

*Si la suite $(s_n)$ est divergente, on dit que la série de terme général $u_n$ (ou la série $\sum u_n$ ) est divergente.*

*Le nombre $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ est appelé somme partielle d'ordre $n$ de la série $\sum u_n$.*

**Exemples 1.1**

1. *Étude de la série de terme général $u_n = (-1)^n$. On a, pour tout entier $n$ : $s_{2n} = 0$ et $s_{2n+1} = 1$. La suite $(s_n)$ n'a pas de limite et la série de terme général $u_n = (-1)^n$ est divergente.*
2. *Étude de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. On a, pour tout entier $n \geq 1$, $s_n =$*

$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \geq \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \dfrac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$. *Donc la suite* $(s_n)$ *tend vers* $+\infty$ *et la série de terme général* $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ *est divergente. On peut écrire, dans ce cas,* $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$.

3. *Étude de la série de terme général* $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$. *On a, pour tout entier* $n$ : $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ *et par suite la somme partielle* $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$. *La suite* $(s_n)$ *est convergente et converge vers* 1, *donc la série de terme général* $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ *est convergente et* $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

4. *Étude de la série géométrique. On considère la série de terme général* $u_n = x^n$ *(appelée série géométrique de raison* $x \in \mathbb{R}$ *) On a :* $s_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$. *Dans le cas où* $x = 1$, *on a :* $s_n = n$. *La suite* $(s_n)$ *tend vers* $+\infty$ *et la série diverge. Dans le cas où* $x = -1$, *on a :* $s_{2n} = 0$ *et* $s_{2n+1} = 1$. *La suite* $(s_n)$ *n'a pas de limite et la série de terme général* $u_n = (-1)^n$ *est divergente. Sinon, pour* $|x| \neq 1$ , *on a :* $x_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. *La suite* $(s_n)$ *est convergente si et seulement si la suite* $x^n$ *est convergente. On distingue donc les cas* $|x| < 1$ *et* $|x| > 1$. *Si* $|x| > 1$, *la suite* $s_n$ *est divergente et la série diverge. Si* $|x| < 1$, *la suite* $s_n$ *est convergente et a pour limite* 0. *La série géométrique* $\sum x^n$ *est convergente et a pour somme* $\frac{1}{1-x}$. *Le reste, défini par* $s - s_n$, *vérifie, pour tout entier* $n$, $|r_n| \leq \frac{|x|^{n+1}}{1-x}$ *et la convergence de la série est d'autant plus rapide que* $|x|$ *est petit. Pour tout* $x$ *appartenant à l'intervalle* $]-1, 1[$ , *on a :* $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

## 1.3 Critères de convergence des séries numériques à terme positif

**Proposition 1.1** *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes réel ou complexe, si la série est convergente alors son terme général* $u_n$ *tend vers* 0.

*Par contraposé, si le terme général d'une série* $\sum u_n$ *ne tend pas vers* 0 *alors la série* $\sum u_n$ *est divergente (grossièrement).*

**Exemples 1.2** *Les séries* $\sum \sin n$, $\sum \ln(2 + \frac{1}{n})$, $\sum e^{1-\frac{1}{n^2}}$ *sont divergentes (grossièrement)*

**Remarques 1.1** *La condition de non convergence est nécessaire mais non suffisante. Si le terme général tend vers* 0 *on n'a pas forcément la convergence de la série* ($\sum \dfrac{1}{n}$). *C'est le but de ce cours en fait, on cherche les conditions à imposer au terme général, qui doit tendre vers* 0, *pour avoir une convergence de la série.*

**Proposition 1.2 (Critère de convergence de Cauchy)** *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes réel ou complexe, la la série est convergente si, et seulement si, la suite des sommes partielles* $(s_n)$ *est de Cauchy.*

**Proposition 1.3 (Critère de comparaison )** *Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes positifs tels que , pour tout $n \in \mathbb{N}$, (ou à partir d'un certain rang $n \geq n_0$) ) on a $a_n \leq b_n$. Si la série $\sum b_n$ est convergente alors la série $\sum a_n$ est convergente.*

*Par contraposé, si la série $\sum a_n$ est divergente alors la série $\sum b_n$ est divergente.*

**Exemples 1.3**

1. *On a $0 < \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}$, or la série de terme général $\frac{1}{n(n+1)}$ est convergente donc la série $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$ est aussi convergente.*
2. *on a $\frac{1}{n} < \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha < 1$, comme la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge, il en est de même pour la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$, pour $\alpha < 1$*

**Proposition 1.4 (Critère d'équivalence)** *Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes positifs tels que, $a_n \sim b_n$ ( au voisinage de $+\infty$). Alors les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont de même nature. i.e elles convergent ou divergent simultanément.*

**Proposition 1.5 (Critère de comparaison série-intégrale)** *Soient $f : [0, +\infty[ \to [0, +\infty[$ décroissante. Alors la série $\sum f(n)$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ sont de même nature. i.e elles convergent ou divergent simultanément.*

**Proposition 1.6 (Les séries de Riemann)** *La série de Riemann $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si, et seulement si, $\alpha > 1$.*

**Proposition 1.7 (Comparaison avec série de Riemann)** *Soit $\sum a_n$ une série à terme positif telle que , $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha a_n = \ell$. Alors on a,*

1. *Si $\ell = 0$ et $\alpha > 1$ alors la série $\sum a_n$ est convergente*
2. *Si $\ell = +\infty$ et $\alpha \leq 1$ alors la série $\sum a_n$ est divergente*
3. *Si $0 < \ell < +\infty$ alors la série $\sum a_n$ est convergente si et seulement si, $\alpha > 1$*

**Proposition 1.8 (Critère de D'Alembert)** *Soit $\sum a_n$ une série à terme positif telle que , $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$. Alors,*

1. *Si $\ell < 1$ alors la série $\sum a_n$ est convergente.*
2. *Si $\ell > 1$ alors la série $\sum a_n$ est divergente*
3. *Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure, c'est le cas des séries de Riemann.*

**Proposition 1.9 (Critère de Cauchy)** *Soit $\sum a_n$ une série à terme positif telle que , $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$. Alors,*

1. *Si $\ell < 1$ alors la série $\sum a_n$ est convergente.*
2. *Si $\ell > 1$ alors la série $\sum a_n$ est divergente*
3. *Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure, c'est le cas des séries de Riemann.*

**Proposition 1.10 (Comparaison des deux critères)** *Soit $(a_n)$ une suite positive, si $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$ alors $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$. La réciproque est fausse.*

**Preuve 1.1** *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $l - \varepsilon < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon$ . Par récurrence, on en déduit : $u_{n_0}(l-\varepsilon)^{n-n_0} < u_n < u_{n_0}(l+\varepsilon)^{n-n_0}$ . or : $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_{n_0}(l-\varepsilon)^{n-n_0}} = l - \varepsilon$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_{n_0}(l+\varepsilon)^{n-n_0}} = l + \varepsilon$ . Donc il existe $n_1 > n_0$ tel que pour $n > n_1$, $l - 2\varepsilon < u_n < l + 2\varepsilon$ , d'où le résultat.*

## 1.4 Séries à terme quelconque

**Définition 1.2 (Séries absolument convergente)** *On dit que la série $\sum a_n$ est absolument convergente si la série $\sum |a_n|$ est convergente.*

*Si la série $\sum a_n$ est dite semi-convergente si elle est convergente sans être absolument convergente.*

**Proposition 1.11** *Si la série $\sum a_n$ est absolument convergente alors elle est convergente.*

**Proposition 1.12 (Critère de Leibniz)** *Soit $(a_n)$ une suite positive décroissante vers $0$ Alors la série alternée $\sum(-1)^n a_n$ est convergente. de plus si $s$ désigne la somme de cette série, alors on a,*

$$s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \cdots \leq s \leq \cdots s_4 \leq s_2 \leq s_0$$

*et, le reste d'ordre $n$, $r_n = s - s_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty}(-1)^p a_p$ vérifie $|r_n| \leq u_{n+1}$*

**Théorème 1.1 (Critère d'Abel)** *Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries telles que*

1. *$a_n > 0$ et décroit vers $0$.*
2. *$\exists M > 0$, $\forall q \geq p \geq 0$, $|b_p + b_{p+1} + \cdots + b_q| \leq M$.*

*Alors la série $\sum a_n b_n$ est convergente et por tout $n$ $|r_n| \leq M a_{n+1}$ .*

**Lemme 1.1** *Soit $S_0, S_1, S_2, \cdots, S_p$ et $a_0, a_1, \cdots, a_p, a_{p+1}$ des nombres complexes. Alors*

$$\sum_{n=0}^{p} S_n(a_{n+1} - a_n) + \sum_{n=1}^{p} a_n(S_n - S_{n-1}) = S_p a_{p+1} - S_0 a_0.$$

*En particulier, si $S_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n$, alors*

$$\sum_{n=0}^{p} a_n b_n = \sum_{n=0}^{p} S_n(a_n - a_{n+1}) + S_p a_{p+1} = \sum_{n=0}^{p-1} S_n(a_n - a_{n+1}) + S_p a_p.$$

# Chapitre 2

# Suite & Séries de Fonctions

## 2.1 Suite de fonctions

**Définition 2.1 (Suites de fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$, ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$))** *Étant donné un ensemble $E$, on note $\mathcal{F}(E, \mathbb{K})$, l'espace vectoriel des fonctions de $E$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. Une suite de fonctions numériques définies sur l'ensemble $E$ est la donnée d'une suite d'éléments de $\mathcal{F}(E, \mathbb{K})$. C'est à dire qu'une suite de fonction est une application de*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathcal{F}(E, \mathbb{K}) \\ n & \mapsto & \begin{array}{rcl} f_n : E & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & f_n(x) \end{array} \end{array}$$

**Remarques 2.1** *Ne pas confondre la suite de fonctions $(f_n) \in \mathcal{F}(E, \mathbb{K})$ avec la suite numérique, $(f_n(x)) \in \mathbb{K}$, pour un $x$ fixé.*

**Définition 2.2 (Convergente simple)** *Soit $(f_n)$ une suite de fonctions numérique. On dit que*

1. *la suite $(f_n)$ converge en un point $x \in E$ lorsque la suite numérique $(f_n(x))$ converge.*
2. *la suite $(f_n)$ **converge simplement sur** $A \subset E$ si, pour tout $x \in A$, la suite $(f_n(x))$ converge.*
3. *on définit ainsi sur $A$ une fonction $f : x \mapsto f(x)$ appelée **limite simple** de la suite $(f_n)$ sur $A$.*
4. *On a alors $f_n \to f$ simplement sur $A$ si, et seulement si,*

$$\forall x \in A, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{2.1}$$

*Cette limite simple sur $A$ est bien sûr unique (si elle existe) puisque pour chaque $x \in A$ , la limite de $(f_n(x))$ est unique.*

**Exemples 2.1 (Convergence simple)**

1. *$f_n(x) = 1 + \frac{x}{n}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction constante égale à 1.*
2. *$f_n(x) = x^n$ converge simplement sur $]-1, 1]$ vers $f$ définie par $f(x) = 0$ si $x \in ]-1, 1[$ et $f(1) = 1$. Elle ne converge pas pour les $x \notin ]-1, 1]$.*
3. *$f_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $f$ définie par $f(x) = e^x$*

4. *$f_n(x) = e^{-nx}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $]0,+\infty[$, $f_n(0) = 1$ converge vers $f(0) = 1$ et diverge pour $x < 0$*

**Définition 2.3 (Convergente uniforme)** *Soit $(f_n)$ une suite de fonctions numérique. On dit que la suite $(f_n)$ **converge uniformément vers la fonction $f$ sur** $A \subset E$, si la suite $f_n \to f$ au sens de la norme de la convergence uniforme dans l'espace $\mathcal{F}(E,\mathbb{K})$. C'est à dire $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in A}|f_n(x) - f(x)| \to 0$.*

*Ce qui est équivalent à dire que,*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad \sup_{x\in A}|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

*ou encore,*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad \forall x \in A, \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{2.2}$$

**Remarques 2.2 (Différence entre les deux convergences)** *La différence entre convergence **simple** et convergence **uniforme** sur $A$, c'est-à-dire entre l'équation (1) et l'équation (2), est que dans (1) le $n_0$ dépend de $\varepsilon$ et de $x$ alors que pour que (2) soit vérifié, il faut un $n_0$ dépendant de $\varepsilon$ mais commun (uniforme) à tous les $x \in A$ .*

**Proposition 2.1** *Si $(f_n)$ converge uniformément vers $f$ sur $A$ alors $(f_n)$ converge simplement vers $f$ sur $A$. La réciproque est fausse en général.*

**Remarques 2.3 (Étapes pour montrer la convergence uniforme)** *L'équation (2) fournit une méthode pour prouver une convergence uniforme sur $A$ (resp. une convergence non uniforme sur $A$) :*

1. *Étude de la convergence simple pour trouver la fonction limite $f$.*
2. *Calcul de $a_n = \sup_{x\in A}|f_n(x) - f(x)|$.*
3. *Démonstration que la suite $(a_n)$ converge vers $0$ (resp. ne converge pas vers $0$). Il sera parfois plus rapide de majorer (resp. minorer) $a_n$ par une suite $a'_n$ qui tend vers $0$ (resp. qui ne tend pas vers $0$).*

**Exemples 2.2 (Convergente uniforme)**

1. *$f_n(x) = 1 + \frac{x}{n}$ converge uniformément vers fonction constante égale à $1$ sur tout intervalle $[-a,a]$, $a$ quelconque positif, mais pas sur $\mathbb{R}$.*
2. *$f_n(x) = x^n$ converge uniformément sur $]-a,a]$ vers la fonction nulle. mais ne converge uniformément ni sur $[0,1]$ ni même sur $[0,1[$ car $\sup_{x\in[0,1[} x^n = 1$ pour tout $n$.*
3. *$f_n(x) = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$ converge uniformément vers $f(x) = e^x$ sur tout compact de $\mathbb{R}$ mais non sur $\mathbb{R}$ tout entier.*

## 2.2 Continuité, intégrabilité et dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions

L'exemple de $f_n(x) = x^n$ sur $[0,1]$ montre que la convergence simple ne suffit pas à assurer la continuité de la limite. Par contre, la limite uniforme l'assure.

**Théorème 2.1 (Théorème de continuité)** *Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et $(f_n)$ une suite de fonctions de $I$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Soit $a \in I$ . On suppose que :*

1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ (à partir d'un certain rang suffit), $f_n$ est continue en $a$ (resp. sur $I$).*
2. *$(f_n)$ converge uniformément vers $f$ sur $I$.*

*Alors $f$ est continue en $a$ (resp. sur $I$).*

**Remarques 2.4** *Si une fonction limite simple d'une suite de fonctions continues, n'est pas continue, alors la convergence n'est pas uniforme.*

**Théorème 2.2 (Théorème d'interversion de limite et d'intégration)** *Soient $[a, b]$ un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et $(f_n)$ une suite d'applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, qui converge uniformément sur $[a, b]$ vers $f$ (continue d'après ce qui précède). Alors la suite $\left(\int_a^b f_n(x)\,\mathtt{dx}\right)$ a une limite et on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathtt{dx} = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,\mathtt{dx} = \int_a^b f(x)\,\mathtt{dx}$$

**Remarques 2.5** *On dit aussi que la convergence uniforme sur $[a, b]$ permet d'intervertir limite et intégration.*

*Là aussi la limite simple ne garantit pas l'interversion limite-intégration.*

**Théorème 2.3 (Théorème de dérivabilité)** *Soient $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et $(f_n)$ une suite de fonctions de $I$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Soit $a \in I$ . On suppose que :*

1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ (à partir d'un certain rang suffit), $f_n$ est dérivable (resp de classe $\mathcal{C}^1$) sur $I$.*
2. *La suite $(f_n')$ converge uniformément sur tout compact de $I$. On note $g$ la fonction limite de $(f_n')$ sur $I$.*
3. *Il existe $x_0 \in I$ tel que la suite $f_n(x_0)$ converge.*

*Alors*

1. *La suite $(f_n)$ converge uniformément sur tout intervalle fermé borné $[a, b]$ contenu dans $I$ (localement uniformément sur $I$) . On note $f$ la limite de la suite $(f_n)$ sur $I$.*
2. *$f$ est dérivable (resp. de classe $\mathcal{C}^1$) sur $I$ et $f' = g$ C'est à dire*

$$\left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to+\infty} f_n'(x)$$

*$f$*

**Proposition 2.2 (Interversion limite-limite)** *Soit $(f_n)$ une suite de fonctions convergente uniformément sur $I$ vers une fonction $f$. et soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \mp\infty$ appartenant à $\bar{I}$ (c'est-à-dire dans $I$ ou sur son bord). On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n$ admet une limite finie $a_n$ quand $x \longrightarrow x_0$ dans $I$. Alors, $(\lim_{n\to+\infty} a_n)$ existe et $\lim_{x\in I\to x_0} f(x)$ existe et on a*

$$\lim_{x\in I\to x_0}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\in I\to x_0} f_n(x)\right)$$

## 2.3 Série de fonctions

**Définition 2.4** *Soit $(f_n)$ une suite de fonctions d'un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ (ou d'une partie de $\mathbb{C}$ ) et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On notera $\sum f_n$ la série de fonctions associée et $(S_n)$ la suite des fonctions somme partielle associées : pour $x \in I$, $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = lim_{n\to+\infty} S_n(x)$*

**Définition 2.5 (Convergence simple)** *La série $\sum f_n$ converge **simplement** sur $I$ si la suite de fonctions $(S_n)$ converge simplement sur $I$.*

*La fonction limite sera alors notée $S$ ou $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, et appelée somme de la série . On notera $\sum f_n \xrightarrow[sur\ I]{C\ S} S$ . À la différence des suites de fonctions, la fonction limite de la série sera en général difficile à exprimer. $S$ a en général une existence "théorique".*

*La fonction $R_n$, reste partiel au rang $n$ , est définie sur $I$ si et seulement si la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $I$.*

*En désignant par $S$ sa somme : $R_n = S - S_n$ soit $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$ converge simplement sur $I$ vers $S$ si et seulement si la suite $(R_n)$ converge simplement sur $I$ vers $0$.*

$$\sum f_n \xrightarrow[sur\ I]{C\ S} S \Longleftrightarrow R_n \xrightarrow[sur\ I]{C\ S} 0$$

**Définition 2.6 (Convergence uniforme)** *La série $(\sum f_n)$ converge uniformément sur $I$ si la suite de fonctions $(S_n)$ converge uniformément sur $I$.*

Ainsi, Toute série de fonctions qui converge uniformément sur $I$ converge simplement sur $I$.

**Proposition 2.3** *Soit $(\sum f_n)$ une série de fonctions qui converge simplement. Alors elle converge uniformément si et seulement si la suite des restes partiels $(R_n)$ converge uniformément vers la fonction nulle.*

Dans le cadre des séries de fonctions, la convergence uniforme sera plus difficile à établir directement, car en général, nous ne disposerons pas d'une expression simple de $R_n$.

**Proposition 2.4 (Critère de convergence uniforme des séries de fonctions alternées)** *Soit $(\sum f_n)$ une série de fonctions définie sur $I$ telle que, pour tout $x \in I$, la série numérique $(\sum f_n(x))$ soit une série alternée dont le terme général décroît en valeur absolue vers $0$. Si la suite de fonctions $(f_n)$ converge uniformément vers $0$ sur $I$, la série $(\sum f_n)$ converge uniformément sur $I$.*

**Preuve 2.1** *Pour tout $x \in I$, la série numérique $(\sum f_n(x))$ est une série alternée dont le terme général décroît en valeur absolue vers $0$. On peut donc appliquer la majoration du reste : $|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| \leq \sup_I |f_n(x)| = a_n$. Or, la suite $(f_n)$ converge uniformément vers $0$, donc $a_n \to 0$. $a_n$ est un majorant uniforme de $R_n$ qui tend vers $0$, donc la série $(\sum f_n)$ converge uniformément sur $I$ .*

**Définition 2.7 (Critère de Cauchy uniforme des séries de fonctions)** *On dit que la série $(\sum f_n)$ est uniformément de Cauchy sur $I$ lorsque la suite $(S_n)$ des sommes partielles vérifie le critère de Cauchy uniforme pour les suites de fonctions, c'est-à-dire :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall q > p \geq N \Rightarrow \sup_{x\in I} |f_{p+1}(x) + f_{p+2}(x) + \cdots + f_q(x)| < \varepsilon$$

**Proposition 2.5 (Critère de Cauchy uniforme)** *La série $(\sum f_n)$ converge uniformément sur $I$ si et seulement si $(\sum f_n)$ est uniformément de Cauchy sur $I$.*

**Proposition 2.6 (Critère d'Abel pour les séries de fonctions)** *Soit $(f_n)$ une suite de fonctions définies sur un intervalle $I$. On suppose que pour tout $x \in I$, $f_n(x) = a_n(x)v_n(x)$ avec*

1. *$(v_n)$ est une suite décroissante de fonctions positives sur $I$ et qui converge uniformément vers $0$ ;*
2. *$(a_n)$ est une suite de fonctions vérifiant :*

$$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \quad |a_0(x) + a_1(x) + \cdots + a_n(x)| \leq M$$

*alors, la série $(\sum f_n)$ converge uniformément sur $I$.*

**Définition 2.8 (Convergence normale d'une série de fonctions)** *La série $\sum f_n$ converge **normalement** sur $I$ si la série numérique $(\sum a_n)$ converge sur $I$ où $a_n = \sup_{x \in I} |f_n(x)|$.*

**Remarques 2.6** *La série $\sum f_n$ converge **normalement** sur $I$ s'il existe une série numérique $(\sum b_n)$ telle que $a_n \leq b_n$ et qui converge sur $I$. Dans la pratique c'est ce qu'on utilise en général.*

**Proposition 2.7 (Convergence normale implique convergence uniforme)** *Si la série $\sum f_n$ converge **normalement** sur $I$ alors elle est uniformément convergente sur $I$.*

## 2.4 Propriétés des séries de fonctions

**Proposition 2.8 (Interversion limite-somme)** *Soit $(\sum f_n)$ une série uniformément convergente sur $I$ et soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \mp\infty$ appartenant à $\bar{I}$ (c'est-à-dire dans $I$ ou sur son bord). On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n$ admet une limite finie $a_n$ quand $x \longrightarrow x_0$ dans $I$. Alors, $(\sum a_n)$ converge et*

$$\lim_{x \in I \to x_0} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \lim_{x \in I \to x_0} f_n(x) \right)$$

**Exemples 2.3**

1. *On a : La série $\sum \dfrac{1}{n^2 + x^2}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. $\forall n \mathbb{N}^\star$, $f_n(x) = \dfrac{1}{n^2 + x^2}$, admet une limite en $+\infty$. Donc la somme $f(x) = \sum_{n \geq 1} \dfrac{1}{n^2 + x^2}$ admet une limite en $+\infty$ et on a l'interversion limite somme :*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + x^2} = \sum_{n \geq 1} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{n^2 + x^2} = 0$$

2. *Soit l'application $\zeta(x) = \sum_{n \geq 1}$ définie sur $]1, +\infty[$. On a $\forall n \geq 1$, $x \longrightarrow \dfrac{1}{n^x}$ admet une limite en $1$ mais la série $\sum_{n \geq 1} \lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{n^x} = \sum_{n \geq 1} \dfrac{1}{n}$ diverge. Donc, la série $\zeta(x) = \sum_{n \geq 1}$ ne converge pas uniformément sur $]1, +\infty[$.*

3. *Soit l'application* $g(x) = \sum_{n\geq 1} \dfrac{e^{-nx}}{n}$ *définie sur* $]0, +\infty[$. *On a* $\forall n \geq 1$, $x \longrightarrow \dfrac{e^{-nx}}{n}$ *admet une limite en* $0$ *mais la série* $\sum_{n\geq 1} \lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-nx}}{n} = \sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ *diverge. Donc, la série* $\sum_{n\geq 1} \dfrac{e^{-nx}}{n}$ *ne converge pas uniformément sur* $]0, +\infty[$.

**Remarques 2.7** *Pour appliquer le théorème il n'est pas nécessaire de vérifier la convergence uniforme de la série* $\sum f_n$ *sur* $I$ *tout entier mais juste au voisinage de* $a$.

*On peut utiliser ce théorème pour montrer qu'une série n'est pas uniformément convergente.*

*soit l'application* $f(x) = \sum_{n\geq 1} \dfrac{x^2}{n^2 + x^2}$ *définie sur* $\mathbb{R}$. *On a* $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $f_n(x) = \dfrac{x^2}{n^2 + x^2}$, *admet une limite en* $+\infty$, *mais la série* $\sum_{n\geq 1} \lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{n^2 + x^2} = \sum_{n\geq 1} 1 = +\infty$ *diverge. Donc, la série* $\sum_{n\geq 1} \dfrac{x^2}{n^2 + x^2}$ *ne converge pas uniformément sur* $\mathbb{R}$.

**Proposition 2.9 (Continuité de la série des fonctions)** *Soit* $(\sum f_n)$ *une série de fonctions. Si la série* $(\sum f_n)$ *est uniformément convergente sur* $I$ *et si chacune des fonctions* $f_n$ *est continue en* $x_0 \in I$, *alors la fonction* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *est continue en* $x_0$.

**Corrolaire 2.1** *Soit* $(f_n)$ *une suite d'applications continues d'un intervalle* $I$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{R}$ ; *si* $(\sum f_n)$ *converge uniformément vers* $f$ *sur tout intervalle fermé borné de* $I$, *alors la somme de la série est continue sur* $I$ .

**Proposition 2.10 (Interversion somme intégrale)** *Soit* $(f_n)$ *une suite d'applications continues d'un intervalle* $I$ *dans* $\mathbb{R}$ *et soient* $a$ *et* $b$ *deux éléments de* $I$ *vérifiant* $a < b$. *Si la série* $(\sum f_n)$ *est uniformément convergente sur* $[a, b]$ *et a pour somme* $f$, *alors* $f$ *est continue donc intégrable sur* $[a, b]$ *et*

$$\int_a^b f(x)\,\mathtt{dx} = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right)\,\mathtt{dx} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_a^b f_n(x)\,\mathtt{dx}\right).$$

**Proposition 2.11 (Primitive d'une série de fonctions)** *Soit* $(f_n)$ *une suite de fonctions continues sur* $I$ *et* $a, b \in I$ *avec* $a < b$. *On suppose que* $(\sum f_n)$ *converge uniformément sur* $[a, b]$. *Alors : la série* $(\sum F_n)$ *définie par* $F_n(x) = \int_a^b f_n(t)\,\mathtt{dt}$ *converge uniformément sur* $[a, b]$ *vers*

$$\int_a^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathtt{dt}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^x f_n(t)\,\mathtt{dt}\right)$$

**Proposition 2.12 (Interversion somme dérivée)** *Soit* $(f_n)$ *une suite d'applications d'un intervalle borné* $I$ *dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *On suppose :*

1. *il existe* $x_0 \in I$ *tel que la série numérique en* $\sum f_n(x_0)$ *soit convergente ;*
2. *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $f_n$ *est dérivable sur* $I$ *et la série* $(\sum f_n')$ *converge uniformément sur* $I$.

*Alors, la série* $(\sum f_n)$ *est uniformément convergente sur* $I$ *et sa somme et dérivable et on a*

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x)$$

**Proposition 2.13 (Dérivation de la somme d'une série de fonctions)** *Soit* $(f_n)$ *une suite d'applications d'un intervalle* $I$ *dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *. On suppose que :*

1. *il existe* $x_0 \in I$ *tel que la série numérique* $(\sum f_n(x_0))$ *soit convergente ;*
2. *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et pour tout fermé borné* $K$ *inclus dans* $I$*,* $f_n$ *est dérivable sur* $F$ *et la série* $(\sum f'_n)$ *converge uniformément sur* $F$*.*

*Alors, la série* $(\sum f_n)$ *est uniformément convergente sur* $F$ *et sa somme est dérivable sur* $I$ *et on a,*

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x)$$

**Proposition 2.14** *Soit* $(f_n)$ *une suite de fonctions de* $\mathcal{C}^k$ *telle que,*

1. *pour tout* $j$ *tel que* $0 \leq j \leq k-1$*, la série* $\sum f_n^{(j)}$ *converge simplement sur* $I$ *;*
2. $\sum f_n^{(k)}$ *converge uniformément sur* $I$ *;*

*Alors,* $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ *est de classe* $\mathcal{C}^k$ *et on a, pour tout* $0 \leq j \leq k$

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}(x)$$

# Chapitre 3

# Séries Entières

## 3.1 Définition d'une série entière

**Définition 3.1 (Définition d'une série entière)** *On appelle série entière une série du type $\sum a_n z^n$, où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels ou de complexes, et $z$ désigne une variable complexe.*

*La somme est la fonction qui à tout complexe $z$ tel que $\sum a_n z^n$ converge, associe $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$*

Étant donnée une série entière $\sum a_n z^n$, la première question qui se pose est celle de son domaine de convergence, c'est à dire l'ensemble des complexes $z$ tels que la série converge.

Dans le plan complexe, on appelle disque (ouvert) de centre $z_0$ et de rayon en $r$ l'ensemble des complexes tels que $|z - z_0| < r$. On le note $D(z_0, r)$, donc $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}, \quad |z - z_0| < r\}$.

Si $z_0 = 0$ on note $D_r$ le disque $D(0, r)$

**Proposition 3.1** *Soit $r$ un réel strictement positif. S'il existe $M$ tel que pour tout $n$, $|a_n|r^n < M$, alors pour tout $z \in D_r$, la série entière $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.*

**Preuve 3.1** *Si $|a_n|r^n$ n'est pas borné, la série $\sum |a_n|r^n$ diverge.*

*Supposons que $|a_n|r^n$ soit majoré par $M$, en remarquant que,*

$$|a_n z^n| = |a_n r^n| \left|\frac{z^n}{r^n}\right| < M \left|\frac{z}{r}\right|^n$$

*par suite, si $|z| < r$ donc $\left|\frac{z}{r}\right| < 1$ et la série $\sum M \left|\frac{z}{r}\right|^n$ converge. Ce qui donne la convergence absolue de la série $\sum a_n z^n$ sur le disque ouvert $D_r$ par comparaison des séries.*

## 3.2 Rayon de convergence

**Définition 3.2 (Rayon de convergence)** *On appelle rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ le réel $R \geq 0$ défini par :*

$$R = \sup\{r \geq 0, (|a_n|r^n) \texttt{ est borne}\}.$$

*Le disque $D_R$ est appelé disque de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.*

**Proposition 3.2** *Le rayon de convergence $R$ de la série entière $\sum a_n z^n$ est donné par la formule :*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \inf_{p\in\mathbb{N}} \sup_{n\geq p} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

**Preuve 3.2** *Supposons que $R$ est strictement positif et fini. Les cas $R = 0$ et $R = +\infty$ se traitent de la même manière.*

*Examinons la suite $(|a_n|r^n)$ dans les deux cas $0 < r < R$ et $r > R$.*

***Cas où*** $0 < r < R$ *: Dans ce cas la suite $(|a_n|r^n)$ tend vers 0, puisque la série $\sum a_n r^n$ est absolument convergente. Donc il existe $n_0$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|a_n|r^n \leq 1$. Or :*

$$|a_n|r^n \leq 1 \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|}r \leq 1 \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{r}.$$

*Ceci est vrai pour tout $n \geq n_0$, donc $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \dfrac{1}{r}$. Comme ceci est vrai pour tout $r < R$, on en déduit :*

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{1}{R}.$$

***Cas où*** $r > R$ *: Dans ce cas la suite $(|a_n|r^n)$ n'est pas bornée, par définition de $R$. Donc pour tout $N$, il existe $n > N$ tel que $|a_n|r^n > 1$. Or :*

$$|a_n|r^n \geq 1 \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|}r \geq 1 \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} \geq \frac{1}{r}.$$

*Mais si une infinité parmi les $n$, $\sqrt[n]{|a_n|}$ sont supérieurs à $\frac{1}{r}$, alors $\limsup n \to +\infty \sqrt[n]{|a_n|} \geq \dfrac{1}{r}$. Comme ceci est vrai pour tout $r > R$, on en déduit :*

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \geq \frac{1}{R}.$$

*La proposition 1.2 rappelle évidemment le critère de Cauchy. Or le critère de d'Alembert est plus facile à appliquer en général. Pour toutes les séries que l'on rencontrera en pratique, le corollaire suivant suffit à déterminer le rayon de convergence.*

**Corrolaire 3.1** *Soit $(a_n)$ une suite telle que $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ converge. Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est donné par*

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

**Proposition 3.3** *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R$. On définit les quatre ensembles :*

1. $E_1 = \{r \in \mathbb{R}^+,$ *tel que* $(a_n r^n)$ *borné*$\}$,
2. $E_2 = \{r \in \mathbb{R}^+,$ *tel que* $a_n r^n \to 0\}$,
3. $E_3 = \{r \in \mathbb{R}^+,$ *tel que* $\sum a_n r^n$ *converge* $\}$,
4. $E_4 = \{r \in \mathbb{R}^+,$ *tel que* $\sum a_n r^n$ *absolument convergente* $\}$,

*Alors :* $[0, R[ \subset E_4 \subset E_3 \subset E_2 \subset E_1 \subset [0, R]$, *et* $R$ *est la borne supérieure de ces quatre ensembles.*

**Proposition 3.4** *Soient* $\sum a_n z^n$ , $\sum b_n z^n$, *des séries entières. On note* $R_a$ *et* $R_b$ *leur rayon de convergence respectif. On définit la série somme* $\sum s_n z^n$ *des deux séries* $\sum a_n z^n$ , $\sum b_n z^n$ *par* $s_n = a_n + b_n$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *en notant le rayon de convergence de la série somme par* $R_s$ *alors on a*

1. *Si* $R_a \neq R_b$, $R_s = \min(R_a, R_b)$,
2. *Si* $R_a = R_b = R$, $R_s \geq R$,

**Proposition 3.5** *Soient* $\sum a_n z^n$ *et* $\sum b_n z^n$ *deux séries entières de rayon de convergence* $R_a$ *et* $R_b$ *respectivement. Alors :*

1. $(\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad |a_n| \leq |b_n|) \Rightarrow R_a \geq R_b$,
2. $(\exists \alpha \in \mathbb{R}, \quad k > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad |a_n| \leq k|b_n|n^\alpha) \Rightarrow R_a \geq R_b$,
3. $(\exists \alpha \in \mathbb{R}, \quad a_n \sim b_n n^\alpha) \Rightarrow R_a \geq R_b$,
4. $(a_n \sim b_n) \Rightarrow R_a = R_b$

## 3.3 Propriété de la somme d'une série

**Proposition 3.6** *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R$, *alors* $\sum a_n z^n$ *est normalement convergente sur* $D_R$ *(sur* $]-R, R[$ *dans le cas réel).*

**Proposition 3.7** *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R$, *alors* $\sum n a_n z^{n-1}$ *et* $\sum \dfrac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ *ont le même rayon de convergence que la série* $\sum a_n z^n$.

*Donc, la somme d'une série entière est de classe* $C^\infty$ *sur* $]-R, R[$. *De plus,*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}$$

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \, \mathtt{dt} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

**Définition 3.3** *Soit* $x_0 \in \mathbb{R}$ *et* $R > 0$ $(R = +\infty)$. *On dit que* $g$ *est développable en série entière en* $x_0$ *sur* $]x_0 - R, x_0 + R[$, *si pour tout* $z \in ]x_0 - R, x_0 + R[$,

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

*Cette identité est le développement en série entière de* $g$.

*Un simple changement de variable permet de se ramener à des développements en série entière en* $0$.

**Proposition 3.8** *La fonction* $g$ *est développable en série entière en* $x_0$ *sur* $]x_0 - R, x_0 + R[$, *si et seulement si la fonction* $f : x \mapsto g(x_0 + x)$ *est développable en série entière en* $0$ *sur* $]-R, R[$.

**Proposition 3.9 (Développement en série entière)** *Si $f$ est développable en série entière sur $]-R,R[$ , alors son développement est*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

**Définition 3.4** *Si $f$ est indéfiniment dérivable sur $]-R,R[$, on appelle série de Taylor de $f$ en 0 la série* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

**Remarques 3.1** *Si $f$ est développable en série entière sur $]-R,R[$, alors $f$ est indéfiniment dérivable au voisinage de 0, et donc admet un développement limité en 0 à tout ordre. Le développement limité à l'ordre $n$ de $f$ est la somme partielle d'ordre $n$ de sa série de Taylor.*

$$f(x)=f(0)+f'(0)z+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n).$$

*Malheureusement, la réciproque est fausse : il peut se faire que $f$ admette un développement limité à tout ordre au voisinage de 0, sans que $f$ soit somme de sa série de Taylor.*

**Proposition 3.10** *Soit $f$ une fonction de classe $C^{n+1}$ sur $]-R,R[$. Alors pour tout $x\in\,]-R,R[$ on a :*

$$f(x)=f(0)+f^{(1)}(0)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+r_n(x),$$

*avec*

$$r_n(x)=\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathtt{dt}.$$

**Preuve 3.3** *Intégrons $r_n(x)$ par parties,*

$$\begin{aligned} r_n(x) &= \int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathtt{dt}\\ &= \left[\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n)}(t)\right]_0^x+\int_0^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)\,\mathtt{dt}\\ &= -\frac{f^{(n)}(0)}{n!}+r_{n-1}(x)\end{aligned}$$

**Proposition 3.11** *Si $f$ est indéfiniment dérivable sur $]-R,R[$ et s'il existe $M$ et $a$ positifs tels que pour tout $n$ et pour tout $x\in]-R,R[$,*

$$|f^{(n)}(x)|\le Ma^n,$$

*alors $f$ est développable en série entière sur $]-R,R[$.*

**Proposition 3.12 (Cas de fonctions pairs ou impairs)** *Si une fonction paire se développe en série entière, tous les termes d'indices impairs de son développement s'annulent.*

*De même, si une fonction impaire se développe en série entière, tous les termes d'indices pairs de son développement s'annulent.*

**Proposition 3.13** *On a le développement en série entière des fonctions usuelles suivantes :*

1. $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \qquad R = +\infty.$
2. $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \qquad R = +\infty.$
3. $\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \qquad R = +\infty.$
4. $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad R = +\infty.$
5. $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ R = +\infty.$

**Proposition 3.14** *On a le développement en série entière des fonctions usuelles suivantes :*

1. $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \Rightarrow -\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}, \qquad R = 1.$
2. $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n, \Rightarrow \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad R = 1.$
3. $\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}, \Rightarrow \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad R = 1.$
4. $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} \Rightarrow \arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad R = 1.$

# Chapitre 4

# Séries de Fourier

## 4.1 Définition d'une série de Fourier

**Définition 4.1 (Série trigonométrique)** *On appelle série trigonométrique réelle, toute série de fonctions de la forme :*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x, \tag{4.1}$$

*avec $x \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$ , $a_n$, $b_n \in \mathbb{R}$, pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$.*

**Remarques 4.1** *Le problème qui se pose naturellement est de déterminer l'ensemble $\Delta$ tel que la série (1) soit convergente pour tout $x \in \Delta$.*

*Si la série converge en $x$, elle converge aussi pour tout point de la forme $x + \dfrac{2k\pi}{\omega}$.*

*Si la série (1) converge sur $\mathbb{R}$ tout entier, on aura $f(x) = f\left(x + \dfrac{2k\pi}{\omega}\right)$*

*En conclusion, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *La série trigonométrique (1) converge dans $\mathbb{R}$.*
2. *La série trigonométrique (1) converge dans $[0, 2\pi/\omega]$*
3. *La série trigonométrique (1) converge dans $[\alpha, \alpha + 2\pi/\omega]$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$*

**Proposition 4.1 (Convergence de la série trigonométrique)** *Si les séries numériques $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes alors la série trigonométrique (1) est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ ; donc absolument et uniformément sur $\mathbb{R}$.*

**Proposition 4.2** *Si les suites numériques $(a_n)$ et $(b_n)$ sont décroissantes et tendent vers 0, alors la série trigonométrique (1) est convergente pour tout $x \neq \dfrac{2k\pi}{\omega}$.*

**Exemples 4.1 (forme complexe d'une série trigonométrique)** *En partant de*

$$\cos n\omega x = \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2}, \quad \sin n\omega x = \frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i}$$

*En posant, $c_n = \dfrac{a_n - ib_n}{2}$ si $n \in \mathbb{N}$ et $c_n = \dfrac{a_n + ib_n}{2}$ si $-n \in \mathbb{N}$ avec $c_0 = \dfrac{a_0}{2}$ la série trigonométrique (1) devient alors $\displaystyle\sum_{n\mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x}$. Cette dernière expression est appelée forme complexe d'une série trigonométrique.*

### 4.1.1 Calcul des coefficients de la série trigonométrique. Cas réel

Mettons nous dans les conditions de convergence uniforme de la série trigonométrique (1) et posons

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_n \cos k\omega x + b_n \sin k\omega x$$

En multipliant par $\cos n\omega x$, puis par $\sin n\omega x$ et en intégrant sur $\left[0, \frac{2\pi}{\omega}\right]$ On obtient alors les coefficients par les expressions suivantes

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x) \cos n\omega x \, \mathtt{dx}, \quad b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x) \sin n\omega x \, \mathtt{dx}$$

**Remarques 4.2 (Cas des fonctions $2\pi$-périodique)** *En particulier si $\omega = 1$, cas des fonctions $2\pi$-périodique, alors,*

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos n\omega x \, \mathtt{dx} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos n\omega x \, \mathtt{dx}$$

*et*

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin n\omega x \, \mathtt{dx} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin n\omega x \, \mathtt{dx}$$

**Remarques 4.3 (Calcul de $c_n$)** *On a $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega x}$, en multipliant par $e^{-in\omega x}$ et en intégrant sur $\left[0, \frac{2\pi}{\omega}\right]$, on trouve que, $\forall n \in \mathbb{Z}$,*

$$c_n = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x) e^{-in\omega x} \, \mathtt{dx}$$

## 4.2 Séries de Fourier

**Définition 4.2 (Définition d'une série de Fourier)** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application périodique de période $T = 2\pi$. On suppose que $\int_T |f(t)| \, \mathtt{dt}$ converge sur un intervalle $I = [\alpha, \alpha + 2\pi]$. On appelle série de Fourier associée à $f$, la série trigonométrique :*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

*avec,*

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, \mathtt{dx}, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, \mathtt{dx}$$

**Remarques 4.4** *Deux questions se posent :*

1. *La série de Fourier associée à $f$ est-elle convergente ?*
2. *En cas de convergence, peut-on dire que la série converge vers $f$ ?*

**Définition 4.3 (Fonctions $\mathcal{C}^1$ par morceau )** *1. Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ est dite continue par morceau sur $[a, b]$ si $f$ est continue sur $[a, b]$ sauf éventuellement en un nombre fini de points où $f$ admet des limites à gauche et à droite. On note, $f(x^+)$ et $f(x^-)$ les limites à droite et à gauche de $x$ respectivement.*

*2. $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ est dite $\mathcal{C}^1$ par morceau sur $[a, b]$ si $f$ et $f'$ sont continues par morceaux sur $[a, b]$. On note $f'(x^+)$ et $f'(x^-)$ les dérivées à droite et à gauche de $f$ en $x$ respectivement.*

**Théorème 4.1 (Théorème de Dirichlet)** *Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Alors, la série de Fourier de $f$ converge simplement sur $R$ et a pour somme en tout point de $\mathbb{R}$, $\dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$. En particulier la série de Fourier d'une fonction converge vers cette même fonction en tout point où $f$ est continue. De plus on a l'égalité de Parseval*

$$\frac{\omega}{2\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(x)|^2\,dx = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

**Lemme 4.1 (Lemme de Lebesgue)** *Soient $a$, $b$ deux réels tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ continue par morceaux. Alors*

$$\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\,\mathtt{dt} \to 0, \qquad \lambda \to +\infty$$

**Preuve 4.1** *1. La propriété est immédiate lorsque $f = 1$.*

*2. Par utilisation de la relation de Chasles, la propriété est vraie lorsque $f$ est en escalier sur $[a, b]$.*

*3. Par densité des fonctions en escalier, si $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ continue par morceaux, pour $\forall \varepsilon > 0$, il existe une application en escalier $g : [a, b] \to \mathbb{C}$ telle que $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$.*

**Preuve 4.2 (Démonstration Théorème de Dirichlet)** *Soit $f : \mathbb{R} \to\to \mathbb{C}$, $T$-périodique, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. On a, pour tout $n \in N$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned}
S_n(f) &= \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\omega x} = \sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(u)e^{-ik\omega u}e^{ik\omega x}\,\mathtt{du}\\
&= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(u)\sum_{k=-n}^{n} e^{ik\omega(x-u)}\,\mathtt{du}\\
(v = x-u) \quad &= -\frac{1}{T}\int_{x+\frac{T}{2}}^{x-\frac{T}{2}} f(x-v)\sum_{k=-n}^{n} e^{ik\omega v}\,\mathtt{dv}\\
(\textit{périodicité}) \quad &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x-v)\sum_{k=-n}^{n} e^{ik\omega v}\,\mathtt{dv}\\
(s = -v) \quad &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x+s)\sum_{k=-n}^{n} e^{ik\omega s}\,\mathtt{ds}
\end{aligned}$$

$$S_n(f) = \frac{1}{T}\int_{[T]} \frac{f(x+v) + f(x-v)}{2}\sum_{k=-n}^{n} e^{ik\omega v}\,\mathtt{dv}$$

*Or, le noyau de Dirichlet* $D_n(v) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ik\omega v} = \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})\omega v}{\sin\frac{\omega v}{2}}$.

*Le noyau de Dirichlet vérifie la propriété,* $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{[T]} D_n(v)\,\mathtt{dv} = 1$

*On obtient ainsi, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, pour tout* $x \in \mathbb{R}$*,* $\tilde{f} = \dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$

$$S_n(f) - \tilde{f} = \frac{1}{T}\int_{[T]}\left(\frac{f(x+v)+f(x-v)}{2} - \frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}\right) D_n(v)\,\mathtt{dv}$$

*Pour* $x$ *fixé, introduisons la fonction*

$$g_x(v) = \frac{(f(x+v)-f(x^+)) + (f(x-v)-f(x^-))}{2}, \quad \forall v > 0$$

*et*

$$g_x(v) = \frac{(f(x-v)-f(x^+)) + (f(x+v)-f(x^-))}{2}, \quad \forall v < 0$$

$g_x$ *est continue par morceaux sur* $\left[-\frac{T}{2}, 0\right[$ *et sur* $\left]0, \frac{T}{2}\right]$ *et il n'y a qu'un nombre fini de discontinuités. Puisque* $f$ *est* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux sur* $\mathbb{R}$*, alors*

$$\lim_{v\to 0^+}\frac{f(x+v)-f(x^+)}{v} = f'(x^+), \quad \lim_{v\to 0^+}\frac{f(x-v)-f(x^+)}{v} = -f'(x^-)$$

*Donc,* $\lim_{v\to 0^+} g_x(v) = \dfrac{f'(x^+)-f'(x^-)}{\omega}$*, de même,*

$$\lim_{v\to 0^-}\frac{f(x-v)-f(x^+)}{v} = -f'(x^+), \quad \lim_{v\to 0^-}\frac{f(x+v)-f(x^-)}{v} = f'(x^-)$$

*Donc,* $\lim_{v\to 0^-} g_x(v) = \dfrac{f'(x^-)-f'(x^+)}{\omega}$*. Ainsi,*$g_x$ *est continue par morceaux sur* $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$*. D'après le lemme de Lebesgue,*

$$S_nf() - \tilde{f} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g_x(v)\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega v\right)\,\mathtt{dv} \longrightarrow 0, \quad n \to +\infty$$

**Exemples 4.2 (La fonction impaire $f(x) = 1$ sur $]0,\pi[$)** *Développer, après justification, en série de Fourier* $f$ *et en déduire la valeur de la série* $\sum_{n\geq 0}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$*, puis celles des séries* $\sum_{n\geq 0}\dfrac{1}{(2n+1)^2}$ *et* $\sum_{n\geq 0}\dfrac{1}{n^2}$.

# Chapitre 5

# Travaux Dirigés

# T.D :d'analyse 4, Série N°1 : Séries numériques & Suites et séries de foncions

**Exercice 1** *Donner la nature des séries numériques suivantes*

$$\sum\left(\frac{n}{n+1}\right)^n, \quad \sum\frac{1}{n(n+1)}, \quad \sum\sin n, \quad \sum\frac{1}{n^\alpha}, \quad \sum e^{-\alpha n}, (\alpha>0) \quad \sum e^{-n^\alpha}, \quad \sum\frac{2^n+3^n}{4^n+5^n}.$$

**Exercice 2** *En utilisant les critères de convergence, étudier la nature des séries numériques dont le terme général $u_n$ est donné par : $a>0$, $x>0$, $\alpha\in\mathbb{R}$*

$$\frac{x^n}{n!}, \quad a^n\sqrt{2^n+1}\ln n, \quad n(n+1)a^n, \quad u_n=\frac{n^n}{4^n n!}, \quad \left(\frac{nx}{2n+1}\right)^n, \quad \left(1+\frac{x}{n}\right)^n, \quad \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}, \quad \frac{1}{(\ln n)^n}$$

$$\frac{\sqrt{n}}{n^\alpha}, \quad 1-\cos\frac{1}{n}, \quad \ln\left(\cos\frac{1}{n}\right), \quad \frac{\ln(n^2+1)}{n^{\alpha\ln n}}, \quad \frac{\sin n\theta}{n^\alpha}, \quad (-1)^n\frac{\cos n}{n}, \quad \frac{\cos n}{\sqrt{n}+\cos n} \quad \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta},$$

**Exercice 3** *Soit $(u_n)$ une suite positive, montrer que $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\ell \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=\ell$. Vérifier que la réciproque est fusse en considérant l'exemple $u_n=\dfrac{2+(-1)^n}{2^n}$ ou l'exemple, $a,b>0$ $u_0=a$, $u_1=b$ $u_{2n}=a^nb^n$ et $u_{2n+1}=a^nb^{n+1}$*

**Exercice 4** *On se propose d'étudier la série de terme générale $u_n=\dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$.*

1. *Peut-on applique le critère de Leibniz pour la série $\sum u_n$,*
2. *Soit $\sum u_n$ une série dont le terme général $u_n$ tend vers 0. Soit $\sum v_n$, avec $v_n=u_{2n}+u_{2n+1}$. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.*
3. *En déduire la nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$*

**Exercice 5** *Soit $\alpha\in\mathbb{R}$, on pose $u_n=n^\alpha e^{-n}$.*

1. *Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente,*
2. *en déduire la formule des croissances comparées $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^\alpha}=+\infty$*

**Exercice 6** *Étudier la nature des suites de fonctions suivantes, $f_n(x)=e^{-nx}$, $g_n(x)=xe^{-nx}$, $h_n(x)=\dfrac{\sin nx}{n}$, $k_n(x)=nx^n\ln x$, avec $k_n(0)=0$, $\ell_n(x)=\arctan\left(\dfrac{x+n}{1+nx}\right)$ pour $x\geq 0$*

**Exercice 7**

1. *Montrer que la série $f(x)=\sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{n+1}\ln x$, pour $x>0$ avec $f(0)=0$ est uniformément convergente sur $[0,1]$*
2. *Étudier l'existence, la continuité et la dérivabilité de la fonction $\sum_{n\geq 0}\dfrac{(-1)^n}{n+x}$ sur $]0,+\infty[$.*

**Exercice 8** *Étudier la convergence simple et uniforme des séries de fonctions de terme général $u_n(x)=\dfrac{e^{-nx}}{n}$ et $u_n(x)=\dfrac{e^{-nx}}{n^2}$*

**Exercice 9** *On pose pour* $x > 0$, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

1. *Justifier que* $S$ *est définie et de classe* $C^1$ *sur* $]0, +\infty[$.
2. *Préciser le sens de variation de* $S$.
3. *Établir que* $xS(x) - S(x+1) = \dfrac{1}{e}$.
4. *Donner un équivalent de* $S$ *en* $+\infty$. *Donner un équivalent de* $S$ *en* $0$.

**Exercice 10** ***(Exercice 1 du contrôle final Session Janvier 2017*** *On considère la série de fonction* $\sum f_n(x)$ *où* $f_n(x) = \dfrac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}$.

1. *Étudier la convergence simple de la série de fonction* $\sum f_n(x)$.
2. *Montrer que la convergence est normale sur* $\mathbb{R}$ *si, et seulement si,* $\alpha > \dfrac{1}{2}$. *Pour la suite, on suppose* $0 < \alpha \leq \dfrac{1}{2}$
3. *Montrer que la convergence est localement normale sur* $\mathbb{R}$.
4. *On pose* $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k\geq n+1} f_n(x)$. *Vérifier que* $R_n(x) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \dfrac{x}{\sqrt{2n}(1+kx^2)}$.
5. *En déduire que la série n'est pas uniformément convergente sur* $[0, \varepsilon]$, *pour tout* $\varepsilon > 0$
6. *On pose* $f(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x)$.
   (a) *Montrer que, pour tout* $\alpha > 0$, $f$ *est continue sur* $]0, +\infty[$.
   (b) *Montrer que, si* $\alpha > \dfrac{1}{2}$, *alors* $f$ *est continue sur* $[0, +\infty[$.
   (c) *Pour* $0 < \alpha \leq \dfrac{1}{2}$ *et* $x > 0$, *on pose* $g(t) = \dfrac{x}{\sqrt{t}(1+tx^2)}$ *pour* $t \in [1, +\infty[$. *Montrer que* $f(x) \geq \displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)\,dt$.
   (d) *Calculer* $\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)\,dt$.
   (e) $f$ *est-elle continue en* $0$.

**Exercice 11** ***(Exercice 2 du rattrapage session Février 2017)*** *On considère la série de fonctions* $S(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{x+n}$

1. *Vérifier que* $S$ *est bien définie sur* $I = ]-1, +\infty[$.
2. *Montrer que* $S$ *est continue sur* $I$.
3. *Montrer que* $S$ *est dérivable sur* $I$, *calculer sa dérivée et en déduire que* $S$ *est strictement croissante sur* $I$.
4. $S$ *est-elle de classe* $C^1$.
5. *Par un encadrement de* $S$, *calculer les limites de* $S$ *en* $-1$ *et* $+\infty$.

# T.D. d'analyse 4. Série N°2 Séries entières

**Exercice 12** 1. *Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :*

$$\sum_{n\geq 0}\frac{n^2}{4^n}z^n,\quad \sum_{n\geq 1}\frac{\ln n}{n^2}z^{2n},\quad \sum_{n\geq 0}\frac{n^n}{n!}z^{3n},\quad \sum_{n\geq 0}e^{-n^2}z^{4n},\quad \sum_{n\geq 0}z^{n^2}\quad \sum_{n\geq 0}\sin nz^n.$$

$$\frac{\sin n}{n^2}z^n,\quad \sum_{n\geq 0}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)x^n,\quad \sin e^{-n}x^n,\quad \sum_{n\geq 0}\frac{\cos(n\alpha)}{n}x^n,$$

2. *Montrer que pour tout* $\alpha\in\mathbb{R}$ *les séries entières* $\sum_{n\geq 0}a_nz^n$ *et* $\sum_{n\geq 0}n^\alpha a_nz^n$ *ont même rayon de convergence.*
3. *Soient* $\sum_{n\geq 0}a_nz^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R$ *et* $z_0\in\mathbb{C}$. *On suppose que* $\sum_{n\geq 0}a_nz_0^n$ *est semi-convergente. Déterminer* $R$.

**Exercice 13** *On considère la série entière suivante :*

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n^2+3n+2)}x^n,$$

1. *Déterminer le rayon de convergence de cette série et étudier le comportement aux bords de l'intervalle de convergence,*
2. *Identifier, dans leurs intervalles de convergence, les séries suivantes :*

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}x^n,\quad \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n+2}x^n,$$

3. *Déterminer, dans son domaine, la fonction* $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n^2+3n+2)}x^n,$

**Exercice 14** *Exprimer à l'aide des fonctions usuelles les deux séries entières suivantes tout en précisant l'intervalle de convergence :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1},\quad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{4n+3}}{4n+3}.$$

**Exercice 15** *Donner la valeur des séries numériques, après avoir justifier leurs existences,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)},\qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(2n+1)}$$

**Exercice 16** *On considère la série entière :* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{in\theta}}{n}x^n.$

1. *Donner le rayon de convergence de la série,*
2. *Donner la valeur la série numérique* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n\theta)}{n}$

**Exercice 17** *Soit $(a_n)$ une suite de nombres réels déterminée par la donnée de ses deux premiers termes $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et la relation de récurrence : $\forall n \geq 2$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-1}$. On considère la série entière $\sum a_n z^n$, on note $R$ son rayon de convergence.*

1. *Montrer que l'on a pour $n \geq 1$ , $0 < a_n \leq 2^{n-1}$. En déduire un minorant strictement positif pour $R$.*
2. *On pose $\forall z \in D(0,R)$, $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Montrer que l'on a : $(1 - z - z^2)f(z) = z$. En déduire un majorant pour $R$.*
3. *Calculer explicitement les coefficients $a_n$ et déterminer alors $R$.*

**Exercice 18** *On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$. Déterminer son rayon de convergence. On note $F$ sa somme dans le disque de convergence $D(0,R)$.*

*Montrer que la fonction satisfait à une équation différentielle linéaire et homogène à coefficients constants du troisième ordre. En déduire l'expression de $F$.*

**Exercice 19** *On pose $f(x) = \dfrac{x^2 - 6x + 5}{(x-2)^2(2x-1)}$. Développer en série entière la fonction $f$ tout en précisant le domaine de convergence de la série.*

**Exercice 20** *Donner le développement en série entière, en précisant le rayon de convergence, de la fonction $f(x) = (1 + x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$. Donner alors le développement en série entière la fonction* $\arcsin x$ *et* $\arccos x$.

**Exercice 21** *Calculer de deux façons différentes $f(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 - x\cos^2 t}$. En déduire la valeur de l'intégrale de Wallis $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t \, \mathtt{dt}$.*

**Exercice 22** ***(Premier exercice de la session du rattrapage Février 2017)***

*On considère la série entière suivante $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$.*

1. *Calculer $R$, rayon de convergence de la série $S(x)$.*
2. *Donner la nature de la convergence de la série $S$ sur $[-R, R]$.*
3. *En décomposant la fraction rationnelle $\dfrac{1}{X(X+1)(2X+1)}$. Calculer la somme $S(x)$, pour tout $x \in ]-R, R[$ sous sa forme la plus simple possible.*
4. *En déduire la valeur de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$, en rappelant le théorème utilisé.*

# T.D. d'analyse 4. Série N°3 : Séries de Fourier

**Exercice 23** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction, impaire, $2\pi$-périodique définie par $f(x) = \dfrac{\pi - t}{2}$ sur $]0, \pi]$*

1. *Préciser la convergence de la série de Fourier de $f$. La convergence est-elle uniforme ?*
2. *Calculer la série de Fourier de $f$.*
3. *En déduire la convergence et la valeur des séries numériques,*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n}, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$$

**Exercice 24** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction, paire, $2\pi$-périodique définie par $f(x) = x$ sur $[0, \pi]$.*

1. *Calculer la série de Fourier de $f$.*
2. *Étudier la convergence simple ou uniforme de la série de Fourier de $f$.*
3. *Déterminer,*

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^4}$$

4. *En déduire*

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^4}$$

**Exercice 25** *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $2\pi$-périodique telle que $f(x) = e^x$ pour tout $x \in ]-\pi, \pi]$.*

1. *Calculer les coefficients de Fourier exponentiels (complexes) de la fonction $f$.*
2. *étudier la convergence (simple, uniforme) de la série de Fourier de $f$.*
3. *En déduire les valeurs des sommes*

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n^2+1}, \quad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2+1}$$

**Exercice 26** ***(Deuxième exercice de la session de Janvier 2017 )*** *On donne la fonction $g$, $2\pi$-périodique, paire, définie sur $[0, \pi[$ par $g(x) = \dfrac{\pi}{2} - x$*

1. *Justifier le développement en série de Fourier de la fonction $g$.*
2. *Donner les valeurs des séries suivantes, après avoir justifier leurs existences.*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^4}$$

3. *On pose maintenant $G$ la fonction primitive de $g$ qui s'annule en $0$. Montrer que $G$ est continue est $2\pi$-périodique.*
4. *Justifier le développement en série de Fourier de la fonction $G$.*

5. *Donner les valeurs des séries suivantes, après avoir justifier leurs existences.*

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^6}$$

**Exercice 27** ***(Troisième exercice de la session de rattrapage Février 2017)*** *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la fonction* $2\pi$*-périodique, impaire, définie par* $f(x) = 1$ *sur* $]0, \pi[$ *et* $f(\pi) = 0$

1. *Donner la nature de convergence de série de Fourier de la fonction* $f$.
2. *Donner les valeurs des séries suivantes :*

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}, \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

# Corrigé de la série 1 du T.D d'analyse 4 Octobre 2017.

**Solution de l'exercice 1** *Le terme général de la série* $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ *ne tend pas vers* 0*, par suite la série diverge. En effet,* $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} \to e^{-1} \neq 0.$

*Pour la série* $\sum \frac{1}{n(n+1)}$*, on remarque d'abord que son terme général peut s'écrire de la forme* $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ *ce qui permet de considérer la suite des sommes partielles* $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$ *qui converge vers* 1*. La série est donc convergente et de somme égale à* 1. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$

*Le terme général de la série* $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ *ne tend pas vers* 0*, par suite la série diverge. En effet, la suite* $\sin n$ *admet l'intervalle* $[-1,1]$ *comme ensemble de valeurs d'adhérence, donc elle diverge.*

*Si* $\alpha \leq 0$*, le terme général de la série de Riemann ne tend pas vers* 0 *et la série diverge. Pour* $\alpha > 0$, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ *est de même nature que l'intégrale généralisée de Riemann car la fonction* $\frac{1}{x^\alpha}$ *est positive et décroissante sur* $[1,+\infty[$*. Donc, pour* $\alpha > 0$ *la série converge si, et seulement si, l'intégrale généralisée* $\int_1^{+\infty} \frac{\mathtt{d}x}{x^\alpha}$ *c'est à dire si, et seulement si,* $\alpha > 1$.

*la série* $\sum_{n\geq 0} e^{-n\alpha} = \sum_{n\geq 0} (e^{-\alpha})^n$*. C'est une série géométrique, par suite elle converge si, et seulement si,* $e^{-\alpha} < 1$*, ce qui est vrai pour tout* $\alpha > 0$*. De plus,* $\sum_{n\geq 0} e^{-n\alpha} = \frac{1}{1-e^{-\alpha}} = \frac{e^\alpha}{e^\alpha - 1}$

*Pour* $\alpha > 0$*, comme la série est à terme positif, on peut appliquer les critères de convergence, dans ce cas, on remarque, par exemple, que* $\lim_{n\to+\infty} n^\beta e^{-n^\alpha} \to 0$*, pour tout* $\beta \in \mathbb{R}$*. Pour conclure la convergence de la série on doit choisir un* $\beta > 1$*, pour utiliser le théorème de comparaison. Donc la série est convergente pour tout* $\alpha > 0$*. Si* $\alpha \leq 0$*, le terme général ne tend pas vers* 0*, la série diverge.*

*Pour la dernière série, le terme général est positif et équivalent, au voisinage de l'infini, à* $\left(\frac{3}{5}\right)^n$*, terme général d'une série géométrique et comme* $\frac{3}{5} < 1$ *la série est donc convergente.*

**Solution de l'exercice 2** *Aux quatre premières séries, on appliquera le critère de D'Alembert, elles sont à terme positif, on alors*

$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{x^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x}{n+1} = 0$*, le série* $\sum \frac{x^n}{n!}$ *converge pour* $\forall x \geq 0$.

$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^{n+1}\sqrt{2^{n+1}+1}\ln(n+1)}{a^n\sqrt{2^n+1}\ln n} = a\sqrt{2}$*, le série* $\sum a^n\sqrt{2^n+1}\ln n$ *converge* $\forall a < \frac{1}{\sqrt{2}}$ *et diverge pour* $a > \frac{1}{\sqrt{2}}$*. Pour* $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$*, le terme général devient* $\sqrt{\frac{2^n+1}{2^n}}\ln \to +\infty$*, la série* *diverge.*

*Pour la troisième série,* $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)(n+2)\ln(n+1)}{n(n+1)\ln n} = a$*. Donc, si* $0 < a < 1$ *la série converge, elle diverge pour* $a > 1$ *et si* $a = 1$*, le terme général devient* $n(n+1)$ *qui ne tend pas vers* $0$*, par suite la série diverge.*

*Pour la quatrième série, on a*

$\lim_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)^{n+1}}{4^{n+1}(n+1)!}\dfrac{n^n}{4^n n!} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n = \dfrac{e}{4} < 1$*. La série converge.*

*Utilisons le critère de Cauchy pour les séries de terme général*

$\left(\dfrac{nx}{2n+1}\right)^n$, $\dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$, $\dfrac{1}{(\ln n)^n}$*. On a alors,*

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\dfrac{nx}{2n+1}\right)^n} = \dfrac{x}{2}$*. La série converge si* $0 < x < 2$*, diverge si* $x > 2$*. Pour* $x = 2$*, le terme général* $\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)^n \to e^{-\frac{1}{2}} \neq 0$*. La série diverge.*

$\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^{\frac{\ln n}{n}}}{\ln n} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{e^{\frac{(lnn)^2}{n}}}{\ln n} = 0 < 1$*. La série est donc convergente.*

$\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{(\ln n)^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\ln n} = 0 < 1$*. La série converge.*

*La série de terme général* $\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$ *est divergente car son terme général tend vers* $e^x > 0$*.*

*Le terme général positif* $\dfrac{\sqrt{n}}{n^\alpha}$ *est équivalent à* $\dfrac{1}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}}$*. Par suite la série converge si, et seulement si,* $\alpha - \frac{1}{2} > 1$*. C'est à dire* $\alpha > \frac{3}{2}$*.*

*Le terme général positif* $1 - \cos\frac{1}{n}$ *est équivalent à* $\dfrac{1}{2n^2}$*. Par suite la série converge.*

*Le terme général négatif* $\ln\left(\cos\dfrac{1}{n}\right) = \ln\left(1 - \dfrac{1}{2n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right)$ *est équivalent à* $-\dfrac{1}{2n^2}$*. Par suite la série converge.*

*Pour la série de terme général* $\dfrac{\ln(n^2+1)}{n^{\alpha\ln n}}$*, on remarque que pour tout* $\beta > 1$*, on a* $\lim_{n\to+\infty} n^\beta \dfrac{\ln(n^2+1)}{n^{\alpha\ln n}} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n^2+1)}{n^{\alpha\ln n-\beta}} = 0$*, car* $\alpha\ln n - \beta \to +\infty$*, par la proposition de comparaison la série converge (*$\beta > 1$*).*

*Pour la série de terme général* $\dfrac{\sin n\theta}{n^\alpha}$*. On distingue 3 cas.*

***Premier cas*** $\alpha > 1$*, dans ce cas* $\left|\dfrac{\sin n\theta}{n^\alpha}\right| \leq \dfrac{1}{n^\alpha}$*. Donc la série converge absolument.*

***Deuxième cas*** $\alpha \leq 0$*, dans ce cas le terme général ne tend pas vers* $0$ *et la série diverge grossièrement.*

***Troisième cas*** $0 < \alpha < 1$*, dans ce cas on utilisera le critère d'Abel. Comme* $\dfrac{1}{n^\alpha}$ *décroit vers* $0$*, il reste à vérifier que les sommes partielles de la suite* $\sin n\theta$ *sont bornées. Pour cela, on fait appel à la somme complexe des sommes partielles de la suite géométrique de raisone*$^{i\theta}$*. On obtient alors,*

$$\left|1 + e^{i\theta} + \cdots + e^{i(n-1)\theta}\right| = \left|\frac{1-e^{in\theta}}{1-e^{i\theta}}\right| = |e^{i\frac{\theta}{2}}|\left|\frac{1-e^{in\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\dfrac{\theta}{2}\right|}, \quad \theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$$

*On alors pour tout $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ et tout $n\mathbb{N}$*

$$|\sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta| \leq \frac{1}{\left|\sin\dfrac{\theta}{2}\right|}$$

$$|1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta| \leq \frac{1}{\left|\sin\dfrac{\theta}{2}\right|}$$

*par suite les séries, $\sum_{n\geq 1}\frac{\sin n\theta}{n^\alpha}$ et $\sum_{n\geq 1}\frac{\cos n\theta}{n^\alpha}$ sont convergentes pour tout $0<\alpha<1$ et tout $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$.*

*Remarquez que pour $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ la première série est nulle et la deuxième devient la série harmonique qui est divergente.*

*Les deux série sont semi-convergentes dans ce cas $0<\alpha<1$. Car en supposant que les séries convergent absolument et comme on a $\cos^2 n\theta \leq |\cos n\theta|$ la série $\sum_{n\geq 1}\frac{\cos^2 n\theta}{n^\alpha}$ converge aussi, mais on a $\cos^2 n\theta = \frac{1-\cos 2n\theta}{2}$ et la série de terme général $\frac{\cos 2n\theta}{n^\alpha}$ est aussi convergente on trouve que la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ converge comme somme de deux séries convergentes. Ce qui est absurde car pour $\alpha<1$, les séries de Riemann sont divergentes.*

***Conclusion** Les séries $\sum_{n\geq 1}\frac{\sin n\theta}{n^\alpha}$ et $\sum_{n\geq 1}\frac{\cos n\theta}{n^\alpha}$ sont **absolument convergentes** pour $\alpha>1$, semi-convergentes pour $0<\alpha<1$ et divergentes pour $\alpha\leq 0$.*

*Pour la série de terme général $(-1)^n\frac{\cos n}{n}$ ( ce n'est pas une série alternée car $\frac{\cos n}{n}$ n'est pas monotone) on remarque que $(-1)^n = \cos n\pi$ par suite $(-1)^n\cos n = \cos n(\pi+1)$ et comme $\pi+1 \notin 2\pi\mathbb{Z}$ la série converge d'après l'exercice précédent.*

*Pour étudier la série de terme général $\frac{\cos n}{\sqrt{n}+\cos n}$, série à terme quelconque, donc ne pas utiliser les équivalences, mais plutôt développer le terme général pour approfondir l'étude. On procède alors comme suit, on a*

$$\frac{\cos n}{\sqrt{n}+\cos n} = \frac{\cos n}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{1+\dfrac{\cos n}{\sqrt{n}}}\right) = \frac{\cos n}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{\cos n}{\sqrt{n}}+\frac{\cos^2 n}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

*Donc,*

$$\frac{\cos n}{\sqrt{n}+\cos n} = \frac{\cos n}{\sqrt{n}} - \frac{\cos^2 n}{n} + \frac{\cos^3 n}{n^{\frac{3}{2}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$$

*Or, $\frac{\cos n}{\sqrt{n}}$ est le terme d'une série semi-convergente d'après un exercice précédent, $\frac{\cos^2 n}{n}$ est le terme, positif, d'une série qui diverge, toujours d'après un exercice précédent, $\frac{\cos^3 n}{n^{\frac{3}{2}}}$ est le terme d'une série absolument convergente, c'est le même cas pour le terme $o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$. Par suite on a la somme de trois terme dont la série converge et un quatrième terme positif* *dont la série diverge, donc la série est divergente, bien que son terme général est équivalent à* $\dfrac{\cos n}{\sqrt{n}}$ *dont la série est convergente.*

*La série de terme général* $\dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$*, qu'on appelle série de Bertrand, diverge grossièrement si* $\alpha < 0$ *ou* $\alpha = 0$ *et* $\beta \leq 0$*. Soit alors* $\alpha > 0$ *ou* $\alpha = 0$ *et* $\beta > 0$*. Dans ce cas la série se comporte comme l'intégrale généralisée de Bertrand* $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha \ln^\beta x}$ *qui est convergente si, et seulement si,* $\alpha > 1$ *ou* $\alpha = 1$ *et* $\beta > 1$*.*

**Solution de l'exercice 3** *Montrons la proposition suivante*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell.$$

*Pour montrer ce résultat on utilisera la proposition suivante (moyenne de Césaro) si* $u_n \to \ell$ *alors la suite* $v_n = \dfrac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n} \to \ell$*.*

*Supposons* $\ell > 0$ *et appliquons cette proposition, la suite* $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) \to \ln \ell$ *donc,*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \frac{1}{n}\ln\frac{u_n}{u_1} \to \ln\ell \Rightarrow \sqrt[n]{u_n} \to \ell$$

*Si* $\ell = 0$*, pour tout* $\varepsilon > 0$*,* $\exists N \in \mathbb{N}$*,* $\forall n \geq N$*,* $0 < \dfrac{u_n}{u_{n-1}} < \varepsilon$ *c'est à dire que* $u_n < \varepsilon u_{n-1} < \cdots < \varepsilon^{n-N} u_N <$*. On obtient alors* $< \sqrt[n]{u_n} < \varepsilon^{\frac{n-N}{n}} u_N^{\frac{1}{n}}$*, en passant à la limite on trouve que* $0 < \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} \leq \lim_{n\to+\infty} \varepsilon^{\frac{n-N}{n}} u_N^{\frac{1}{n}} = \varepsilon$ *ceci étant vérifié pour tout* $\varepsilon > 0$ *donc* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = 0$*.*

*Considérons la suite* $u_n = \dfrac{2 + (-1)^n}{2^n}$*, on a* $\dfrac{1}{2^n} \leq u_n \leq \dfrac{3}{2^n}$*. Donc,* $\dfrac{1}{2} \leq \sqrt[n]{u_n} \leq \dfrac{\sqrt[n]{3}}{2} \to \dfrac{1}{2}$*. Par suite,* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \dfrac{1}{2}$ *existe.*

*Quant à la suite,* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$*, en considérant ses sous-suies paire et impaire, on trouve que* $\dfrac{u_{2n+1}}{u_{2n}} = \dfrac{\frac{1}{2^{2n+1}}}{\frac{3}{2^{2n}}} = \dfrac{1}{6}$ *suite constante et* $\dfrac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}} = \dfrac{\frac{3}{2^{2n+2}}}{\frac{1}{2^{2n+1}}} = \dfrac{3}{2}$ *suite constante, les sous-suites paire et impaire n'ont pas la même limite c'est à dire que la suite* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ *n'a pas de limite alors que la suite* $\sqrt[n]{u_n}$ *a en a une.*

*Même chose pour l'exemple,* $a, b > 0$ $u_0 = a$*,* $u_1 = b$ $u_{2n} = a^n b^n$ *et* $u_{2n+1} = a^n b^{n+1}$*. En considérant les sous suites paire et impaire de* $\sqrt[n]{u_n}$*, on obtient,* $\sqrt[2n]{u_{2n}} = (a^n b^n)^{\frac{1}{2n}} = \sqrt{ab}$ *et* $\sqrt[2n+1]{u_{2n+1}} = (a^n b^{n+1})^{\frac{1}{2n}} = \sqrt{ab} \times b^{\frac{1}{2n}} \to \sqrt{ab}$*. Donc la suite* $\sqrt[n]{u_n}$ *converge vers* $\sqrt{ab}$*.*

*Pour la suite,* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$*, ces deux sous-suites paires et impaires ont des limites différentes, en effet,* $\dfrac{u_{2n+1}}{u_{2n}} = b$ *et* $\dfrac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}} = a$ *donc la suite* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ *n'admet pas de limite.*

**Solution de l'exercice 4** *Considérons la série de terme général* $\dfrac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$*.*

1. *On ne peut pas appliquer le critère de Leibniz car la suite* $u_n = \dfrac{1}{n+(-1)^n}$ *n'est pas décroissante, en effet,* $u_{2n} = \dfrac{1}{2n+1}$ *et* $u_{2n+1} = \dfrac{1}{2n} > u_{2n}$.
2. *On pose* $v_n = u_{2n} + u_{2n+1}$*, on a* $S_n(v) = \sum_{k=0}^{k=n}(u_{2k} + u_{2k+1}) = S_{2n+1}(u)$.
   *Supposons la série* $\sum v_n$ *convergente donc la suite des sommes partielles* $S_n(v)$ *converge par suite* $S_{2n+1}(u)$ *converge aussi et comme* $S_{2n}(u) = S_{2n+1}(u) - u_{2n+1}$ *et la suite* $u_n$ *converge vers* $0$*, donc* $u_{2n+1}$ *converge aussi vers* $0$*, donc* $S_{2n}(u)$ *est aussi convergente et a même limite que* $S_{2n+1}(u)$*, la suite des somme partielles* $S_n(u)$ *converge ainsi la série* $\sum u_n$ *est convergente.*
   *Supposons maintenant la série* $\sum u_n$ *converge, alors la suite des sommes partielles* $S_n(u)$ *converge aussi et donc* $S_{2n+1}(u) = S_n(v)$ *converge c'est à dire que la série* $\sum v_n$ *converge.*
   *Appliquons ceci à notre exemple* $\sum_{n\geq 2} \dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ *elle est de même nature que la série de terme général* $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n}\right) = -\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n(2n+1)}$ *cette série à terme négatif équivalent à* $-\dfrac{1}{4n^2}$ *terme d'une série de Riemann convergente, par suite la série* $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$ *est aussi convergente.*

**Solution de l'exercice 5** *Considérons la série* $\sum n^\alpha e^{-n}$

1. *La série est convergente, soit en remarquant que son terme général est négligeable devant* $\dfrac{1}{n^2}$ *(terme d'une série convergente). Car* $\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha+2}e^{-n} = 0$*. On peut utiliser aussi le critère de D'Alembert ou de Cauchy, en effet, on a* $\lim_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^\alpha \dfrac{e^{-(n+1)}}{e^{-n}} = e^{-1} < 1$.
   *Pour le critère de Cauchy, on a* $\lim_{n\to+\infty}(n^\alpha e^{-n})^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} n^{\frac{\alpha}{n}}e^{-1}$*. or* $n^{\frac{\alpha}{n}} = e^{\alpha\frac{\ln n}{n}} \to 1$*, à l'infini. Donc,* $\lim_{n\to+\infty}(n^\alpha e^{-n})^{\frac{1}{n}} = e^{-1} < 1$
2. *Le terme général d'une suite convergente tend vers* $0$ *par suite* $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{e^n}{n^\alpha} = +\infty$.
   *Comme la fonction* $\dfrac{e^x}{x^\alpha}$ *est croissante pour* $x\alpha$*, car* $(x^{-\alpha}e^x)' = (x-\alpha)x^{-\alpha-1}e^x$*. Soit maintenant* $A > 0$*,* $\exists N \in \mathbb{N}$*, on choisit* $N > \alpha$ *tel que* $\forall n \geq N$*,* $\dfrac{e^n}{n^\alpha} > A$*. Par suite* $\forall x > N > \alpha$ *on a* $\dfrac{e^x}{x^\alpha} > \dfrac{e^N}{N^\alpha} > A$*. C'est à dire* $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

**Solution de l'exercice 6** *Considérons la suite de fonctions* $f_n(x) = e^{-nx}$*, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-nx} = \begin{cases} +\infty & si \quad x < 0, \\ 1 & si \quad x = 0, \\ 0 & si \quad x > 0 \end{cases}$$

*Donc,* $f_n$ *converge simplement vers la fonction* $f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad x = 0, \\ 0 & si \quad x > 0 \end{cases}$ *sur* $[0, +\infty[$.

*On a* $\sup_{[0,+\infty[} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{]0,+\infty[} e^{-nx} = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Par suite, la convergence n'est pas uniforme sur* $[0,+\infty[$ *ni même sur* $]0,+\infty[$. *mais on a une convergence localement uniforme sur* $]0,+\infty[$, *car pour tout* $\varepsilon > 0$, $\sup_{[\varepsilon,+\infty[} e^{-nx} = e^{-n\varepsilon} \to 0$ *quand* $n \to +\infty$.

*Pour la suite de fonctions* $g_n(x) = xe^{-nx}$ *on a*

$$\lim_{n\to+\infty} xe^{-nx} = \begin{cases} +\infty & si \quad x < 0, \\ 1 & si \quad x \geq 0, \end{cases}$$

*Donc,* $g_n$ *converge simplement vers la fonction nulle sur* $[0,\infty$.

*Pour étudier la convergence uniforme, on examine* $\sup_{[0,+\infty[} |g_n(x)| = \sup_{[0,+\infty[} xe^{-nx}$. *Pour calculer son* sup *sur* $(0,+\infty[$, *on étudie la fonction* $xe^{-nx}$ *sur cet intervalle. On a* $(xe^{-nx})' = (1-nx)e^{-nx}$ *qui est positive sur* $[0,\frac{1}{n}]$ *et négative sur* $[\dfrac{1}{n},+\infty[$ *par* $\sup_{[0,+\infty[} xe^{-nx} = g_n(\frac{1}{n}) = \dfrac{e^{-1}}{n} \to 0$ *à l'infini, par suite la convergence est uniforme sur* $[0,+\infty[$.

*Pour la suite* $h_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$, *on a* $\sup_{x\in\mathbb{R}} |h_n(x)| \leq \dfrac{1}{n} \to 0$ *à l'infini, donc* $h_n$ *converge uniformément sur* $\mathbb{R}$ *vers la fonction nulle.*

*la suite* $k_n$ *n'est défini que sur* $[0,+\infty[$. *Pour* $x > 1$ $k_n(x) \to +\infty$ *donc diverge. Pour* $x = 0$ *ou* $x = 1$ $k_n(x) = 0$ *pour tout* $n$, *elle est donc convergente pour* $x = 0$ *ou* $x = 1$. *Pour* $0 < x < 1$ *on a* $nx^n \ln x \to 0$. *Donc, la suite* $k_n$ *converge simplement vers la fonction nulle sur* $[0,1]$.

*Pour étudier la convergence uniforme, on examine* $\sup_{[0,1]} |k_n(x)| = \sup_{[0,1]} -nx^n \ln x$. *Or* $(-nx^n \ln x)' = -nx^{n-1}(n \ln x + 1)$. *Par suite,* $\sup_{[0,1]} |k_n(x)| = -k_n(e^{-\frac{1}{n}}) = e^{-1} \nrightarrow 0$. *La convergence n'est pas uniforme sur* $[0,1]$. *Remarquons que le nombre qui donne le maximum* $e^{-\frac{1}{n}} \to 1$ *quand* $n \to +\infty$, *par suite, pour tout* $0 < \alpha < 1$, *en posant* $\varepsilon = 1-\alpha$, *il existe* $N \in \mathbb{N}$, *pour tout* $n \geq N$, *on a* $1 - e^{-\frac{1}{n}} < 1-\alpha$, *c'est à dire* $\alpha < e^{-\frac{1}{n}}$ *pour tout* $n \geq N$. *Donc,* $\forall n \geq N$ $\sup_{[0,\alpha]} -nx^n \ln x = -n\alpha^n \ln \alpha \to 0$. *La convergence est donc localement uniforme sur* $[0,1[$.

**Solution de l'exercice 7**

1. *Pour montrer que la série* $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} (-1)^n x^{n+1} \ln x$, *pour* $x > 0$ *avec* $f(0) = 0$ *est uniformément convergente sur* $[0,1]$, *on applique le critère de Leibniz uniforme, il s'agit d'une série alterné, il suffit de montrer que le terme général décroit, en valeur absolu, uniformément vers 0. on a* $\sup_{[0,1]} |x^{n+1} \ln x| = \sup_{[0,1]}(-x^{n+1} \ln x)$ *or* $(-x^{n+1} \ln x)' = -x^n((n+1)\ln x + 1)$. *Par suite le* sup *est atteint en* $e^{-\frac{1}{n+1}}$ *et* $\sup_{[0,1]} |x^{n+1} \ln x| = \dfrac{e^{-1}}{n+1} \to 0$.
   *D'où la convergence uniforme de la série* $f(x)$. *Remarquer que la série n'est pas normalement convergente car le* sup *de son terme général est équivalent au terme général de la série harmonique qui diverge. Mais il faut noter que la convergence est toutefois localement normalement convergente sur* $]0,1]$ *car pour tout* $\varepsilon > 0$, $\sup_{[\varepsilon,1]} |x^{n+1} \ln x| = -\varepsilon^{n+1} \ln \varepsilon$, *pour* $n$ *assez grand, et la série* $\sum_{n\geq 0} \varepsilon^{n+1} \ln \varepsilon$ *est convergente.*
2. *Il s'agit d'une série alterné dont le terme général* $\dfrac{1}{n+x}$ *décroit uniformément vers 0, en effet,* $\sup_{[0,+\infty[} \left|\dfrac{1}{n+x}\right| \dfrac{1}{n} \to 0$. *D'où l'existence et la continuité de la somme de la série sur* $[0,+\infty[$, *qu'on la notera* $f(x)$.

*Pour la dérivabilité, on a* $\left(\dfrac{(-1)^n}{n+x}\right)' = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$. *Comme on a le* $\sup_{[0,+\infty[}\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+x})^2\right| = \dfrac{1}{n^2}$. *La série des termes dérivés de la série* $f(x)$ *converge normalement sur* $[0,+\infty[$ *et comme les termes dérivés sont continues alors la somme est de classe* $\mathcal{C}^1$. *En fait,* $f$ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$. *Car, pour tout entier* $k \geq 2$, *la kème dérivée du terme général de la série* $f$ *est égal à* $\dfrac{(-1)^{n+k}}{(n+x)^{k+1}}$ *et comme le* $\sup_{[0,+\infty[}\left|\dfrac{(-1)^{n+k}}{(n+x)^{k+1}}\right| = \dfrac{1}{n^{k+1}}$. *D'où la convergence normale des séries de terme général les dérivées du terme de la série de somme* $f(x)$.

*Remarquons qu'on a*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x} = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)+(x+1)} = \frac{1}{x} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x+1} = f(x+1).$$

*Donc,*

$$\forall x > 0, \quad f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x}$$

**Solution de l'exercice 8** *1. Concernant la série* $\sum_{n\geq 1}\dfrac{e^{-nx}}{n}$ *ne converge pas normalement sur* $[0,+\infty[$ *ni même sur* $]0,+\infty[$ *car* $\sup_{[0,+\infty[} = \sup_{]0,+\infty[}\dfrac{e^{-nx}}{n} = \dfrac{1}{n}$ *et la série harmonique diverge. Toute fois la convergence est localement normalement car pour tout* $\varepsilon > 0$, $\sup_{[\varepsilon,+\infty[}\dfrac{e^{-nx}}{n} = \dfrac{e^{-n\varepsilon}}{n}$ *et la série* $\sum_{n\geq 1}\dfrac{e^{-n\varepsilon}}{n}$ *converge car son terme général est négligeable devant* $\dfrac{1}{n^2}$ *terme général d'une série de Riemann convergente. On peut aussi remarquer que* $\dfrac{e^{-n\varepsilon}}{n} \leq e^{-n\varepsilon}$ *terme d'une suite géométrique et comme* $e^{-\varepsilon} < 1$ *la série géométrique converge par suite la série* $\sum_{n\geq 1}\dfrac{e^{-n\varepsilon}}{n}$ *converge aussi et la convergence de la série* $\sum_{n\geq 1}\dfrac{e^{-nx}}{n}$ *est normale sur*$[\varepsilon,+\infty$. *La convergence n'est même pas uniforme sur* $]0,+\infty[$ *car* $\forall n \geq 1$, $x \longrightarrow \dfrac{e^{-nx}}{n}$ *admet une limite en* $0$ *égale à* $\dfrac{1}{n}$, *mais la série* $\sum_{n\geq 1}\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-nx}}{n} = \sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n}$ *diverge. Donc, la série* $\sum_{n\geq 1}\dfrac{e^{-nx}}{n}$ *ne converge pas uniformément sur* $]0,+\infty[$.

*La somme de la série* $\sum_{n\geq 1}\dfrac{e^{-nx}}{n}$, *qu'on notera* $f(x)$ *est de classe* $\mathcal{C}^{+\infty}$, *car pour tout entier naturel* $k \geq 1$, $\left(\dfrac{e^{-nx}}{n}\right)^{(k)} = n^{k-1}e^{-nx}$ *la série* $\sum_{n\geq 1}n^{k-1}e^{-nx}$ *est localement normalement convergente, car* $\sup_{[\varepsilon,+\infty[}n^{k-1}e^{-nx} = n^{k-1}e^{-n\varepsilon}$. *Or, la série* $\sum_{n\geq 1}n^{k-1}e^{-n\varepsilon}$ *converge car son terme générale est négligeable devant* $\dfrac{1}{n^2}$ $(\lim_{n\to+\infty}n^{k11}e^{-n\varepsilon} = 0)$ *terme général d'une série convergente. Par suite, la fonction* $f$ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$.

*La série* $\sum_{n\geq}\dfrac{e^{-nx}}{n^2}$ *est normalement convergente sur* $[0,+\infty[$ *car* $\sup_{[0,+\infty[}\dfrac{e^{-nx}}{n^2} = \dfrac{1}{n^2}$ *et la série* $\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2}$ *est convergente. La série des termes dérivées successives de* $\dfrac{e^{-nx}}{n^2}$ *sont localement normalement convergentes sur* $]0,+\infty[$.

*Par suite la série* $\sum_{n\geq} \dfrac{e^{-nx}}{n^2} \in \mathcal{C}^\infty(]0,+\infty[) \cap \mathcal{C}^0([0,+\infty[)$.

**Solution de l'exercice 9** *Soit* $x > 0$ *et* $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

1. *La série* $S$ *est localement normalement convergente sur* $]0,+\infty[$. *En effet,* $\forall \varepsilon > 0$, $\sup_{[\varepsilon[,+\infty} \left|\dfrac{(-)^n}{n!(x+n)}\right| = \dfrac{1}{n!(\varepsilon+n)}$ *et la série* $\sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{n!(\varepsilon+n)}$ *est convergente car son terme générale est équivalent à* $\dfrac{1}{nn!}$ *terme général d'une série convergente par le critère de D'Alembert* ($\dfrac{nn!}{(n+1)(n+1)!} < \dfrac{1}{n+1} \to 0 < 1$). *Comme le terme général de la série* $S$ *est classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]0,+\infty[$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et les séries de terme générale la* $k^{iéme}$ *dérivée de* $\dfrac{(-1)^n}{n!(x+n)}$ *qui vaut* $\dfrac{(-1)^{n+k}k}{n!(x+n)^{k+1}}$ *terme général d'une série localement normalement convergente car* $\sup_{[\varepsilon[,+\infty} \left|\dfrac{(-)^{n+k}k}{n!(x+n)^{k+1}}\right| = \dfrac{k}{n!(\varepsilon+n)^{k+1}} \sim \dfrac{k}{n^{k+1}n!}$ *terme d'une série convergente. D'où* $S$ *est* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]0,+\infty[$.
2. $S'(x)$ *est une série alternée, elle est donc de même signe que son premier terme* $-\dfrac{1}{x^2}$ *qui est négatif. Donc,* $S$ *est strictement décroissante*
3. *On a* $S(x) = \dfrac{1}{x} + \sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n!(x+n)}$. *Donc,*

$$\begin{aligned}
xS(x) &= 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n x}{n!(x+n)} \\
&= 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n (x+n)}{n!(x+n)} - \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n n}{n!(x+n)} \\
&= 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n!} + \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!((x+1)+(n-1))} \\
&= \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} + \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!(x+1+n)} \\
&= e^{-1} + S(x+1)
\end{aligned}$$

*Finalement,*

$$exS(x) - eS(x+1) = 1$$

4. *Comme la convergence est uniforme au voisinage de l'infini (même normale sur* $[\varepsilon,+\infty[$*) et comme tous les termes de la série admettent une limite nulle au voisinage de l'infini alors par le théorème d'interversion limite somme On a* $\lim_{x\to+\infty} S(x) = 0$. *En remplaçant dans la dernière égalité on trouve que* $\lim_{x\to+\infty} exS(x) = 1$. *C'est à dire qu'au voisinage de l'infini* $S(x) \sim \dfrac{1}{ex}$.

*Même chose au voisinage de 0,* $S(x+1) \to S(1)$. *Comme* $S(1) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} = -\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} = -\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n!} = -(e^{-1}-1) = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e}$. *Comme* $exS(x) -$

*$eS(x+1) = 1$ alors, $\lim_{x\to 0} exS(x) = eS(1)+1 = e$, par suite, $S(x) \sim \dfrac{1}{x}$ au voisinage de 0.*

**Solution de l'exercice 10** *On considère la série de fonction $f(x) = \sum f_n(x)$ où $f_n(x) = \dfrac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}$.*

1. *$f_n(0) = 0$, $\forall n \geq 1$, donc $\sum_{n\geq 1} f_n(0) = f(0) = 0$. La série est convergente en 0. Soit maintenant $x \neq$, alors $|f_n(x)| \sim \dfrac{1}{n^{\alpha+1}|x|}$ terme général d'une série convergente pour tout $\alpha > 0$. Donc, la série est (absolument) convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$ si, et seulement si, $\alpha > 0$*
2. *Étudions la convergence normale de la série sur $\mathbb{R}$. On a $f_n'(x) = \dfrac{1-nx^2}{n^\alpha(1+nx^2)^2}$. Donc, $\sup_{\mathbb{R}} |f_n(x)| = f_n(\frac{1}{\sqrt{n}}) = \dfrac{1}{2n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$. La série est donc normalement convergente si, et seulement, $\alpha > \dfrac{1}{2}$. Supposons pour la suite que $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$*
3. *Montrons que la convergence est normale sur $]-\infty, -\varepsilon] \cup \varepsilon, +\infty[$, pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui donne la convergence locale normale sur $\mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$, pour tout $n \geq n_0$, où $\frac{1}{\sqrt{n_0}} < \varepsilon$, on a $\sup_{|x|\geq\varepsilon} |f_n(x)| = f_n(\varepsilon)$. Donc la série est normalement convergente sur $[\varepsilon, +\infty[$ pour tout $\varepsilon > 0$. D'où le résultat.*
4. *On pose $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k\geq n+1} f_n(x)$. Comme la série est à terme positif ($f$ est impair, on l'étudie seulement pour $x > 0$), alors $R_n(x) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \dfrac{x}{k^\alpha(1+kx^2)}$. Pour $n+1 \leq k \leq 2n$, on a $k^\alpha \leq (2n)^\alpha \leq (2n)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2n}$ car $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$. Par suite, pour tout $n+1 \leq k \leq 2n$, $\dfrac{1}{k^\alpha} \geq \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$ ainsi, $R_n(x) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \dfrac{x}{k^\alpha(1+kx^2)} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \dfrac{x}{\sqrt{2n}(1+kx^2)}$*
5. *D'après ce qui précède $R_n(x) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \dfrac{x}{\sqrt{2n}(1+2nx^2)} = \dfrac{\sqrt{n}x}{\sqrt{2}(1+2nx^2)}$. Donc $\sup_{[0,\varepsilon]} R_n(x) \geq \sup_{[0,\varepsilon]} \dfrac{\sqrt{n}x}{\sqrt{2}(1+2nx^2)} = \dfrac{1}{4}$. Le $\sup$ est atteint pour $x = \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$. Donc la série n'est pas uniformément convergente sur $[0, \varepsilon]$, pour tout $\varepsilon > 0$.*
6. *On pose $f(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x)$.*
   (a) *Pour tout $\alpha > 0$, la série est localement normalement convergente sur $]0, +\infty[$, de plus que les termes de la série sont tous continues sur $\mathbb{R}$ alors la fonction somme $f$ est continue sur $]0, +\infty[$.*
   (b) *Si $\alpha > \dfrac{1}{2}$, la convergence de la série est normale sur sur $\mathbb{R}$ et comme les termes de la série sont tous continues sur $\mathbb{R}$ $f$ est continue sur $[0, +\infty[$.*
   (c) *Pour $0 < \alpha \leq \dfrac{1}{2}$ et $x > 0$, on pose $g(t) = \dfrac{x}{\sqrt{t}(1+tx^2)}$ pour $t \in [1, +\infty[$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in [k, k+1]$, $g(t) \leq \dfrac{x}{\sqrt{k}(1+kx^2)} \leq \dfrac{x}{k^\alpha(1+kx^2)}$, donc, $\displaystyle\int_k^{k+1} g(t)\,\mathrm{d}t \leq \dfrac{x}{k^\alpha(1+kx^2)}$ ce qui donne $\displaystyle\int_1^n g(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n} \dfrac{x}{k^\alpha(1+kx^2)} \leq f(x)$.*

*Ceci pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc la fonction $g$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, de plus, $f(x) \geq \int_1^{+\infty} g(t)\,dt$.*

(d) *On a* $\int_1^{+\infty} g(t)\,dt = \int_1^{+\infty} 2\frac{x/2\sqrt{t}}{1+(x\sqrt{t})^2}\,dt = 2\left[\arctan(x\sqrt{t})\right]_1^{+\infty} = \pi - 2\arctan x$.

(e) *D'après la dernière inégalité* $\lim_{x\to 0^+} f(x) \geq \lim_{x\to 0^+} \pi - 2\arctan x = \pi$ *alors que* $f(0) = 0$ *par suite* $f$ *ne peut être continue en* $0$.

**Solution de l'exercice 11** *On considère la série de fonctions*

$$S(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{x+n} = \sum_{n\geq 1} (-1)^n v_n(x).$$

1. *Soit* $x \in ]-1, +\infty[$, *la série* $S(x)$ *est alternée et comme* $\frac{1}{x+n+1} < \frac{1}{x+n}$, *la suite* $v_n(x)$ *décroit vers* $0$, $\lim_{n\to+\infty} = 0$, *donc la série* $S(x)$ *est convergente pour tout* $x \in ]-1, +\infty[$, *par suite elle est bien définie sur* $I$.
2. *Il s'agite d'une série alternée de fonctions dont le terme général est continu, comme la décroissance de la suite* $v_n$ *est uniforme car* $v_n(x) < \frac{1}{n-1}$, *pour* $n \geq 2$ *la convergence de la série est uniforme . Le théorème de continuité garantit la continuité de la fonction* $S$ *sur* $I$.
3. *La série de terme général la dérivée de celui de* $S$ *est aussi alternée et on a* $v_n'(x)$ *décroit vers* $0$ *uniformément,* $|v_n'(x) = \frac{1}{(n+x)^2}| < \frac{1}{(n-1)^2}$. *D'où la convergence uniforme de la série de terme général la dérivé de* $v_n$. *Donc,* $S$ *est dérivable.*

   *On a* $S'(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{(x+n)^2}$ *le signe de* $S'$ *est celui de son premier terme qui est* $\frac{1}{(x+1)^2} > 0$ *donc* $S$ *est strictement croissante sur* $I$.
4. *Comme* $S'$ *est continue comme somme uniforme de fonctions continues, alors* $S$ *est de classe* $C^1$.
5. $S$ *est alternée donc* $-\frac{1}{x+1} < S(x) < -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}$. *D'où* $\lim_{x\to -1} S(x) = -\infty$ *et* $\lim_{x\to\infty} S(x) = 0$.

# Corrigé de la série 2 du T.D d'analyse 4 Novembre 2017.

**Solution de l'exercice 12**

**Solution de l'exercice 13** *On considère la série entière suivante :* $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n(n^2+3n+2)} x^n$,

1. *Les coefficients de la série sont donnés par une fraction rationnelle, donc le rayon est égale à* 1.

2. *Pour la série* $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n+1}$,*, on reconnait le développement de la fonction* $\ln(1+x) = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$*, donc on peut conclure que* $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n+1} = \frac{x-\ln(1+x)}{x}$. $\forall x \neq 0$. *Ce développement est valable pour tout* $|x| < 1$*,car la série entière est de rayon de convergence égale à* 1.

   *Pour la deuxième série, c'est la même chose,on réécrit la série comme suit* $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n+2} = \frac{1}{x^2}\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+2}}{n+2} = \frac{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^2}$*. même chose que précédemment, ce développement est valable pour tout* $|x| < 1$*,car la série entière est de rayon de convergence égale à* 1.

3. *Pour déterminer la fonction* $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n(n^2+3n+2)}$,*, on commence par décomposer la fraction rationnelle, on obtient,* $\frac{1}{n(n^2+3n+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right]$*, par suite,*

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n^2+3n+2)}x^n &= \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\left[\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right]x^n \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} - 2\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n+1} + \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n+2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln(1+x) - 2\frac{x-\ln(1+x)}{x} + \frac{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{x^2\ln(1+x) - 2x^2 + 2x\ln(1+x) + \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{(1+x)^2\ln(1+x) - \frac{3}{2}x^2 - x}{x^2}
\end{aligned}$$

   *La série entière est convergente aux bords de l'intervalle de convergence, donc la convergence a lieu sur* $[-1, 1]$.

*Comme conséquence, on peut dire que,*

$$\lim_{x\to -1}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n^2+3n+2)}x^n = -\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n^2+3n+2)} = \lim_{x\to -1}\frac{1}{2}\frac{(1+x)^2\ln(1+x)-\frac{3}{2}x^2-x}{x^2} = -\frac{1}{4}$$

*Chose qu'on peut calculer en écrivant,*

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n^2+3n+2)} &= \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\left[\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right]\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)-\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

**Solution de l'exercice 14** *Pour sommer la série entière suivante, il suffit de dériver sous le signe somme on trouve alors, le rayon de convergence étant égal à* $1$*, donc le calcul se fait sur l'intervalle* $]-1,1[$ *et comme la série est divergente en* $1$ *et* $-1$*, donc l'égalité n'aura lieu que dans l'intervalle ouvert* $]-1,1[$*, on a*

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty}x^{4n} = \frac{1}{1-x^4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{1+x^2}\right).$$

*Donc*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1} = \frac{1}{2}\left(\texttt{argth}\, x+\arctan x\right)$$

*De même, sur* $]-1,1[$*, on a :*

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{4n+3}}{4n+3}\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty}x^{4n+2} = \frac{x^2}{1-x^4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right).$$

*Donc*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{4n+3}}{4n+3} = \frac{1}{2}\left(\texttt{argth}\, x-\arctan x\right)$$

**Solution de l'exercice 15** *Pour la première série, en décomposant en élément simple, on reconnait le développement de la fonction* $\arctan x$ *et celui de* $\ln(1+x)$*, en effet, on a* $\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}-\dfrac{(-1)^n}{2n+2}$ *or on sait que,* $\arctan x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{2n+1}$ *sur* $[-1,1]$ *donc on a,*
$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$*, de l'autre coté,* $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n+1}$ *sur* $]-1,1]$*. Donc, on peut passer à la limite au voisinage de* $1$ *car les deux séries admettent une limite en ce point, on a d'abord,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^n-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+2}x^n,\quad \forall x\in]-1,1[$$

*Les deux séries à droite admettent une limite lorsque $x \to 1^-$, donc de même pour la série à gauche. L'égalité (unicité) de la limite donne :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \arctan 1 - \frac{1}{2}\ln(1+1) = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$

*Pour la deuxième série, on peut refaire la même chose que précédemment, avec une décomposition en élément simple en reconnait le développement des fonctions* $\ln(1-x)$ *pour* $|x| < 1$ *et celui de* $\texttt{argth}\, x$. *On peut aussi penser à poser la série* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}$ *sur* $]-1, 1[$. *La série peut être prolongée en 1 et $-1$ (fonction paire) car la série converge pour $x = 1$. En dérivant, on obtient,*

$$f'(x) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \ln(1+x) - \ln(1-x).$$

$f(x) = [(x+1)\ln(1+x) - x] + [(1-x)\ln(1-x) + x] = (1+x)\ln(1+x) - (1-x)\ln(1-x)$

*Donc, en passant à la limite à gauche de 1, on trouve,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = 2\ln 2$$

**Solution de l'exercice 16** *Considérons la série entière suivante :* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} x^n$.

1. *Son rayon de convergence est égale à* $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{e^{i(n+1)\theta}}{e^{in\theta}}\right| = 1$

2. *La série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} x^n$ *est convergente pour* $|x| = 1$ *(pour* $\theta \in ]0, 2\pi[$ *) elle est même normalement convergente sur* $[-1, 1]$ *car* $\sup_{[-1,1]} \left|\frac{e^{in\theta}}{n} x^n\right| = \frac{e^{in\theta}}{n}$, *et la série de terme générale* $\frac{e^{in\theta}}{n}$ *converge, pour* $\theta \in ]0, 2\pi[$, *donc la fonction somme, qu'on note $f$ est continue sur* $[-1, 1]$, *par suite la valeur de la série numérique* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n}$ *n'est autre que* $\texttt{Im}f(1)$. *Reste maintenant, à donner explicitement la fonction $f$. On a*
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{in\theta} x^{n-1} = \frac{e^{i\theta}}{1 - xe^{i\theta}} = \frac{1}{e^{-i\theta} - x} = \frac{e^{i\theta} - x}{(e^{-i\theta} - x)(e^{i\theta} - x)} = \frac{e^{i\theta} - x}{x^2 + 1 - x(e^{i\theta} + e^{-i\theta})}.$$
*Par suite, pour* $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, $\texttt{Im}f'(x) = \frac{\sin\theta}{(x - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta}$, *donc,*
$$\texttt{Im}f(x) = \int_0^x \frac{\sin\theta}{(t - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta} = \left[\arctan\left(\frac{t - \cos\theta}{\sin\theta}\right)\right]_0^x = \arctan\left(\frac{x - \cos\theta}{\sin\theta}\right) - \arctan\frac{-\cos\theta}{\sin\theta}$$
*Ce qui donne, pour* $x = 1$,
$$\texttt{Im}f(1) = \arctan\left(\frac{1 - \cos\theta}{\sin\theta}\right) + \arctan\frac{1}{\tan\theta} = \arctan\left(\frac{2\sin^2(\theta/2)}{2\sin\theta\cos(\theta/2)}\right) + \frac{\pi}{2} - \arctan\tan\theta$$

*ce qui conduit à,*

$$\mathtt{Im}f(1) = \sum_{0}^{+\infty} \frac{\sin n\theta}{n} = \arctan\tan(\theta/2) + \frac{\pi}{2} - \arctan\tan\theta = \frac{\pi - \theta}{2}$$

**Solution de l'exercice 17** *Soit la série entière* $\sum a_n z^n$ *telle que* $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ *et* $a_n = a_{n-1} + a_{n-1}$ *pour* $n \geq 2$.

1. *Montrons que pour tout* $n \geq 1$, $a_n \geq 2^{n-1}$. *C'est vérifiée pour* $n = 1$, $a_1 = 1 \leq 2^0$. *Si, la relation est vérifiée jusqu'à l'ordre* $n$, $n > 2$, *alors* $a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \leq 2^{n-1+}2^{n-2} \leq 2 \times 2^{n-1} = 2^n$.
2. *Puisque la suite* $(a_n)$ *est positive (par récurrence) et* $a_n \leq 2^{n-1}$, $n \geq 1$, *la série* $\sum a_n z^n$ *converge si la série* $\sum 2^n z^n$ *converge, or cette dernière est de rayon de convergence,*

$$\frac{1}{\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2^{n+1}}{2^n}} = \frac{1}{2}.$$

*Donc pour tout* $|z| < \frac{1}{2}$ *la série* $\sum 2^n z^n$ *converge et par suite* $\sum a_n z^n$ *converge aussi, ce qui implique que son rayon de convergence est au moins égale* $\frac{1}{2}$. *i.e* $R \geq \frac{1}{2}$. *Soit*

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n \\
&= z + \sum_{n=2}^{+\infty} (a_{n-1} + a_{n-2}) z^n \\
&= z + z\sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-1} z^{n-1} + z^2 \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2} z^{n-2} \\
&= z + zf(z) + z^2 f(z)
\end{aligned}$$

*Finalement, on a bien* $(1 - z - z^2)f(z) = z$. *C'est à dire* $f(z) = \dfrac{z}{1 - z - z^2} = -\dfrac{z}{(z - z_1)(z - z_2} = \dfrac{1}{z - z_2)}$ *avec* $z_1 = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$ *et* $z_2 = -\dfrac{\sqrt{5} + 1}{2}$,
*la décomposition en élément simple, donne,* $z_1 - z_2 = \sqrt{5}$

$$f(z) = \frac{z_2}{z_1 - z_2}\frac{1}{z - z_2} - \frac{z_1}{z_1 - z_2}\frac{1}{z - z_1} = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1}{\dfrac{z}{z_2} - 1} - \frac{1}{\dfrac{z}{z_1} - 1}\right) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1}{1 - \dfrac{z}{z_1}} - \frac{1}{1 - \dfrac{z}{z_2}}\right)$$

*Donc, le rayon de convergence de* $f$ *est inférieur à* $\min(|z_1|, |z_2|) = |z_1| = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

3. *On a, pour* $|z| < |z_1|$, $z_1 z_2 = -1$, $R = |z_1|$

$$f(z) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{z_1}\right)^n - \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{z_2}\right)^n\right) = \frac{\sqrt{5}}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z_2^n - z_1^n}{(z_1 z_2)^n}\right) z^n = \frac{\sqrt{5}}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(z_2^n - z_1^n) z^n$$

**Solution de l'exercice 18** *Le rayon de convergence de la série* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ *est égal à* $+\infty$. *Donc, la fonction somme est définie sur* $\mathbb{R}$ *tout entier, on remarque que,* $F'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}$,
$F''(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}$ *et* $F^{(3)}(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-3}}{(3n-3)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} = F(x)$.

*Donc,* $F$ *vérifie l'équation différentielle linéaire du troisième ordre* $y^{(3)-y=0}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ *et* $y''(0) = 0$. *L'équation caractéristique est donnée par* $r^3 - 1 = 0$, *qui admet pour racine,* $r_1 = 1$, $r_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, $r_3 = \overline{r_2} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$. *La solution générale est de la forme,* $y(x) = Ae^x + Be^{(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})x} + Ce^{(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})x}$. *Pour déterminer* $F$ *la solution exacte, on vérifie les conditions initiales, on obtient alors,*

$$\begin{cases} A+B+C &= 1 \\ A + r_2 B + \overline{r_2} C &= 0 \\ A + \overline{r_2} B + r_2 C &= 0 \end{cases}$$

*Ce qui donne,* $A = B = C = \dfrac{1}{3}$, *Donc,*

$$F(x) = \frac{1}{3}e^x + \frac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

**Solution de l'exercice 19** *, pour développer la fraction,* $f(x) = \dfrac{x^2-6x+5}{(x-2)^2(2x-1)}$, *on commence par la décomposer en élément simple, on trouve alors,*

$$f(x) = \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{(x-2)^2} = \left(\frac{1}{x-2}\right)' - \frac{1}{1-2x} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\right)' - \frac{1}{1-2x}$$

*Pour,* $|x| < \dfrac{1}{2}$, *on a*

$$f(x) = -\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\right)' - \sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^n = -\sum_{n=0}^{+\infty}\left(2^n + \frac{n+1}{2^{n+2}}\right)x^n.$$

**Solution de l'exercice 20** *Pour développer en série entière la fonction,* $(1+x)^\alpha$, *on commence par remarquer qu'elle vérifie une équation différentielle simple, puisqu'on a* $(1+x)f'(x) - \alpha f(x) = 0$, *avec* $f(0) = 1$. *Si on suppose qu'elle est développable en une série entière,* $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, *la série vérifierait alors l'équation différentielle,* $(1+x)y' - \alpha y = 0$

*avec* $y(0) = 1$. *Ce qui nous conduit à,*

$$\begin{aligned} 0 &= (1+x)S'(x) - \alpha S'x) - \alpha S(x) \\ &= (1+x)\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} - \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^n - \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n-\alpha)a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(n+1)a_{n+1} - (\alpha - n)a_n\right] x^n \end{aligned}$$

*D'où la relation récurrente entre les termes de la suites,* $(n+1)a_{n+1} - (\alpha - n)a_n = 0$, *pour tout* $n$, *ce qui conduit à, d'une part au rayon de convergence car, on a* $\frac{1}{R}\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n-\alpha}{n+1}\right| = 1$ *par suite* $R = 1$ *d'autre par itération, on a,*

$$a_n = \frac{\alpha - (n-1)}{n} a_{n-1} = \frac{\alpha - (n-1)}{n}\frac{\alpha - (n-2)}{n} a_{n-2} = \ldots = \frac{(\alpha - (n-1))(\alpha - (n-2))\cdots(\alpha - 1)\alpha}{n(n-1)\cdots 2 \times 1} a_0$$

*Comme* $a_0 = f(0) = 1$, *on obtient finalement,*

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

*Par suite, la fonction* $(1+x)^\alpha$ *est développable en série entière sur l'intervalle* $]-1, 1[$ *et on a* $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *avec* $a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$.

*Pour calculer le développement en série entière de la fonctin* arcsin, *on commence par calculer celui de sa dérivée* $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. *Or, d'après ce qui précède pour* $\alpha = -\frac{1}{2}$, *on obtient*

$$a_n = \frac{-\frac{1}{2} \times -\frac{3}{2} \times \cdots \times -\frac{2n-1}{2}}{n!} = (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \cdots \times 2n-1}{2^n n!} \times \frac{2 \times 4 \times \cdots \times 2n}{2 \times 4 \times \cdots \times 2n} = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

*On en déduit alors que, pour* $|x| < 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$$

*et,*

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{x^{2n+1}}$$

**Solution de l'exercice 21** *D'une part, on a pour $|x| < 1$,*

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 - x\cos^2 t}. \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{(1-x)\cos^2 t + + \sin^2 t} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt/\cos^2 t}{(1-x) + \tan^2 t} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\tan^2 t)}{(1-x) + \tan^2 t} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x}} \left[\arctan\left(\frac{\tan t}{\sqrt{1-x}}\right)\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x}} \\
\textit{d'après l'exercie précédent} &= \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^n
\end{aligned}
$$

*D'autre part, toujours pour $|x| < 1$, on a*

$$
\frac{dt}{1 - x\cos^2 t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos^{2n} t x^n
$$

*La convergence de la série est normale, par rapport, à la variable $t$ sur $\mathbb{R}$ tout entier, car $\sup_{\mathbb{R}} |\cos^{2n} t x^n| \leq |x|^n$ et la série numérique, $x$ étant fixé, $\sum_{n=0}^{+\infty} |x|^n$ est convergente pour $|x| < 1$. Donc, on peut intégrer, par rapport à $t$, terme à terme sur tout intervalle de $\mathbb{R}$. Donc,*

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1 - x\cos^2 t} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \cos^{2n} t x^n \, dt \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t \, \mathtt{dt} \right) x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} W_n x^n
\end{aligned}
$$

*L'unicité de la série implique alors que les intégrales de Wallis,*

$$
W_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2}.
$$